

半剛接要素を境界条件の導入に利用した I 形鋼曲がりはりの崩壊解析

COLLAPSE ANALYSIS OF CURVED STEEL I-BEAMS UTILIZING
A SEMI-RIGID ELEMENT

修行 稔*, 島津 勝**

Minoru SHUGYO and Masaru SHIMAZU

The accuracy of a new straight beam element proposed by the author for the combined inelastic bending and nonuniform torsion problem is examined. A plastic hinge type formulation is employed combining the 'modified incremental stiffness method', the updated Lagrangian formulation and numerical integration about the end sections of the element. The behavior of a semi-rigid joint is also modeled as the element-end compliance. The boundary conditions of the curved beams are realized by utilizing this element-end compliance. Comparisons with existing test and numerical results show that the beam element has a sufficient accuracy for the collapse analysis of curved I-beams.

Keywords: curved beam, semi-rigid element, nonuniform torsion, collapse analysis

曲がりはり, 半剛接要素, 不均一ねじり, 崩壊解析

1. 序

水平面内で曲率を持つ開断面のはりが鉛直荷重を受けると, 変形が進むにつれて二軸曲げと不均一ねじりが連成した状態となり, はりの崩壊荷重は単一曲げ状態のときに較べて著しく低下することが知られている¹⁾。この崩壊挙動に関する研究は, その複雑さからかそれ程多くなく, ABAQUSシェル要素を用いた Tan ら²⁾ および Liew ら³⁾ の研究, 水平面内で曲がったはりに特化して定式化された曲がりはり要素を用いた Pi ら⁴⁾ の研究が目につく程度である。汎用のはり要素でこれらの研究に匹敵する精度を有するものが報告された例は見当たらない。

著者らは先に, 開断面材・閉断面材・半剛接接合部を有する鋼骨組の統一的三次元崩壊解析のための汎用真直はり要素を提案した⁵⁾。この要素は CFT 部材の混在する骨組の解析にも適用可能であるととも⁶⁾, 上谷らが示した片持はり一柱の構面内挙動限界⁷⁾ も検出可能な精密さを有している⁸⁾。しかしながら, 前述のような二軸曲げと不均一ねじりが連成するときの解析精度についてはいまだ確認されていない。また, はりが曲がっている場合, 一般にはり端の断面主軸と全体座標系の軸とは方向が一致せず, はり端が完全固定でない限り, 境界条件の導入のための特別な座標変換が必要となる難点も残されている。本研究は, 上記の汎用真直はり要素を用いて Fukumoto ら¹⁾ が実験を実施した 6 種類の I 形曲がりはりの崩壊挙動を解析し, 本要素の半剛接機能を応用して境界条件の実現に利用すれば, 曲がりはりが通常の真直はりとならぬ手順で解析可能なこと, また解析精度も実用上充分なものであることを検証するものである。

2. 解析方法

まず, 解析法⁵⁾の概要を述べる。本解法は基本的には, modified incremental stiffness method⁹⁾を各ステップで要素の剛体変位を完全に除去する updated Lagrangian formulation と組合わせ, 大変位弾塑性挙動解析に拡張したものである。要素接合部に接合部のコンプライアンスを考慮できるが, 今のところコンプライアンスの相互作用までは考えていない。また, 柱はり接合部や部材軸線が急激に折れ曲がる点では断面のそりは拘束されると仮定している。

2. 1 要素の弾塑性接線剛性行列

本解法で定式化する要素は plastic hinge model であり, 定式化に際して以下のように仮定する。

- (1) 部材は薄肉の開または閉断面材である。
- (2) 断面はそり成分を除けば平面を保持する。
- (3) 骨組の節点変位は大きい部材の弾性ひずみは小さい。
- (4) 閉断面材については軸方向応力とサンブナンねじりによるせん断ひずみ, 開断面材については軸方向応力のみが部材の降伏に寄与する。
- (5) 塑性変形成分は軸力, 二軸曲げモーメントおよびねじりモーメント (閉断面材) またはそりモーメント (開断面材) に対応する 4 成分である。
- (6) 局部座屈はない。
- (7) 要素内では一般化塑性ひずみは通常非線形的に分布するが, これを要素両端の値を用いて線形に内挿する。
- (8) 要素の長さの半分に生じる塑性変形成分はそれぞれ要素両端 i, j の長さ零の plastic hinge に集中して生じる。

* 長崎大学工学部構造工学科 教授・工博

** 長崎大学大学院生産科学研究科 大学院生・工修

Prof., Dept. of Structural Eng., Faculty of Eng., Nagasaki Univ., Dr. Eng.
Graduate Student, Graduate School of Science and Technology, Nagasaki Univ., M. Eng.

2. 2 幾何学的非線形剛性

図1に要素の初期座標系を示す。要素の両端を i, j とし i 端の図心に原点 O をとり、材軸方向に x 軸、これと右手系をなすように断面主軸方向に y, z 軸をとる。同様に、 i 端のせん断中心 S に原点をとり、材軸方向に \bar{x} 軸、これと右手系をなすように断面主軸方向に \bar{y}, \bar{z} 軸をとる。仮定 (1)~(3) および modified incremental stiffness method⁹⁾ によって (1) 式を満足する弾性接線剛性行列 K^e が得られる。

$$dQ + R = K^e dq^e \quad (1)$$

ここに、 R は不平衡力、 Q と q^e はそれぞれ要素端力と要素端弾性変位である。 Q と q^e の成分は以下のようである。

$$\left. \begin{aligned} Q &= [F_{xi} F_{yi} F_{zi} M_{xi} M_{yi} M_{zi} M_{wi} \\ &\quad F_{xj} F_{yj} F_{zj} M_{xj} M_{yj} M_{zj} M_{wj}]^T \\ q^e &= [u_i^e \ v_i^e \ w_i^e \ \theta_{xi}^e \ \theta_{yi}^e \ \theta_{zi}^e \ \theta_{wi}^e \\ &\quad u_j^e \ v_j^e \ w_j^e \ \theta_{xj}^e \ \theta_{yj}^e \ \theta_{zj}^e \ \theta_{wj}^e]^T \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 F_{kl} は l 端の k 方向の力、 M_{kl} は l 端の k 軸回りのモーメント、 M_{wi} は l 端のそりモーメントであり、 q^e の成分は対応する弾性変位である。各ステップにおける要素の新しい座標系とその座標系での要素端全変位は、大きな回転に対応した回転行列¹⁰⁾ を用いて、剛体変位を完全に除去して決定し、評価される。従って、 K^e に含まれる要素端変位のうちのいくつかは、もし要素が弾性域にあれば、常に以下のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} u_i^e &= v_i^e = w_i^e = v_j^e = w_j^e = 0 \\ \theta_{xi}^e &= -\theta_{xj}^e \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

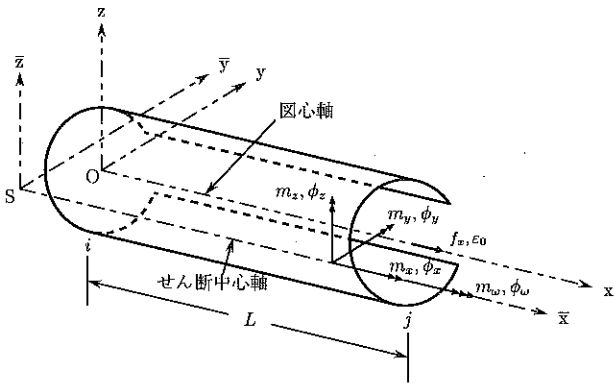


図1 要素座標系と一般化応力および一般化ひずみ

2. 3 塑性変形増分の算定

本要素の plastic hinge に生じる塑性変形増分は、要素両端断面の塑性接線係数行列を利用して評価する。この係数行列は、要素両端の微小な繊維の、その時点での剛性を断面に関して数値積分することによって求められる。

2. 3. 1 繊維の応力ひずみ関係

閉断面部材においては、von Mises の降伏条件と塑性流れ則および Ziegler の移動硬化則を用いるが⁵⁾、本論文においては I 形断面はりのみを扱うので、以下閉断面部材についてのみ述べる。閉断面部材においては、繊維の応力増分とひずみ増分の関係は仮定 (4) より次のようになる。

$$d\sigma = E_t d\varepsilon \quad (4)$$

ここに、 σ は軸力、曲げモーメントおよびそりモーメントによって生じる垂直応力、 E_t は繊維の一軸応力ひずみ関係の硬化係数である。

2. 3. 2 plastic hinge 部断面の塑性接線係数行列

薄肉閉断面材の一般化応力 f_o 、一般化ひずみ δ_o の成分は次のようになる (図1)。

$$\left. \begin{aligned} f_o &= [f_x \ m_y \ m_z \ m_w]^T \\ \delta_o &= [\varepsilon_0 \ \phi_y \ \phi_z \ \phi_w]^T \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、 f_x は軸力、 m_y と m_z は曲げモーメント、 m_w はそりモーメント、 δ_o の成分はそれぞれに対応する一般化ひずみである。plastic hinge 部の断面を微小な繊維に分割し、繊維の応力と一般化応力の関係および繊維のひずみと一般化ひずみの関係を用いて Newton-Raphson 法を適用すれば、一般化応力増分と一般化ひずみ増分の間に次のような関係が得られる¹¹⁾。

$$df_o = s d\delta_o \quad (6)$$

ここに、 s は断面に関する接線係数行列である。弾性域における s を s^e で、 $d\delta_o$ の弾性成分と塑性成分をそれぞれ $d\delta_o^e$ と $d\delta_o^p$ で表すと、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} df_o &= s^e d\delta_o^e \\ d\delta_o &= d\delta_o^e + d\delta_o^p \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(6) 式を (7) 式に代入すると次式が導かれる。

$$d\delta_o^p = (s^{-1} - s^{e-1}) df_o \equiv \hat{s} df_o \quad (8)$$

ここに、 \hat{s} は断面に関する塑性接線係数行列である。 s^e は、断面の状態にかかわらず一定の値を保持する。この接線係数行列の成分は、断面に関する数値積分で得られる。図2は本論文で扱う I 形はり断面の繊維への分割図である。

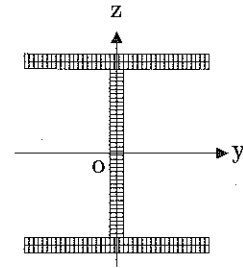


図2 plastic hinge 部断面の分割図

2. 3. 3 塑性変形増分の算定

さて、薄肉開断面の要素両端の plastic hinge に生じる塑性変形増分を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} dq_i^p &= \left[du_i^p \ 0 \ 0 \ 0 \ d\theta_{y_i}^p \ d\theta_{z_i}^p \ d\theta_{x_i}^p \right]^T \\ dq_j^p &= \left[du_j^p \ 0 \ 0 \ 0 \ d\theta_{y_j}^p \ d\theta_{z_j}^p \ d\theta_{x_j}^p \right]^T \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

これらの塑性変形増分は、要素の一般化塑性ひずみ増分によって生じるものであり、以下の手順で求められる。

まず、要素両端断面の一般化応力を現時点における要素端力を座標変換して得る (i 端断面は x - および \bar{x} - 座標軸に関して負の面, j 端断面は同じく正の面であることを注意)。これらの一般化応力を用いれば前節に述べた方法で要素両端における \hat{s}_i と \hat{s}_j が求められる。 \hat{s}_i の成分 $(\hat{s}_{ki})_i$ を用いて新しい 7 次の正方行列 s_i^p を定義する。

$$s_i^p = \begin{bmatrix} (\hat{s}_{11})_i & 0 & 0 & 0 & (\hat{s}_{12})_i & (\hat{s}_{13})_i & (\hat{s}_{14})_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\hat{s}_{21})_i & 0 & 0 & 0 & (\hat{s}_{22})_i & (\hat{s}_{23})_i & (\hat{s}_{24})_i \\ (\hat{s}_{31})_i & 0 & 0 & 0 & (\hat{s}_{32})_i & (\hat{s}_{33})_i & (\hat{s}_{34})_i \\ (\hat{s}_{41})_i & 0 & 0 & 0 & (\hat{s}_{42})_i & (\hat{s}_{43})_i & (\hat{s}_{44})_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

j 端についても同様に \hat{s}_j に対応する s_j^p が定義できる。

仮定 (7) より、一軸曲げ状態での塑性曲率増分は図 3 のように分布するから、仮定 (8) を導入すれば i 端の plastic hinge に生じる塑性回転角増分が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} -d\theta_{y_i}^p &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \left\{ d\phi_{y_i}^p + \frac{1}{2} (d\phi_{y_i}^p + d\phi_{y_j}^p) \right\} \\ &= \frac{l}{2} \cdot \frac{3d\phi_{y_i}^p + d\phi_{y_j}^p}{4} \end{aligned} \quad (11)$$

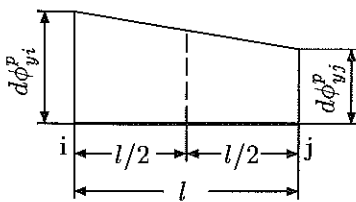


図 3 要素の一般化塑性曲率増分の分布

i 端の plastic hinge に生じる塑性変形増分 dq_i^p は、(8) 式および i 端断面が負の面であることを考慮しつつ (11) 式を拡張することによって得られる。

$$dq_i^p = \frac{l}{2} \cdot \frac{3s_i^p dQ_i - s_j^p dQ_j}{4} \quad (12)$$

j 端の plastic hinge についても、同様にして次式が得られる。

$$dq_j^p = \frac{l}{2} \cdot \frac{-s_i^p dQ_i + 3s_j^p dQ_j}{4} \quad (13)$$

(12), (13) 式をまとめると次式となる。

$$\begin{bmatrix} dq_i^p \\ dq_j^p \end{bmatrix} = \frac{l}{8} \begin{bmatrix} 3s_i^p & -s_j^p \\ -s_i^p & 3s_j^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dQ_i \\ dQ_j \end{bmatrix} \equiv s^p dQ \quad (14)$$

2. 4 半剛接合部の変位増分

(14) 式の s^p は、plastic hinge の塑性変形増分を要素端力増分に関係づけるコンプライアンス行列である。この plastic hinge の外側に長さ零の半剛接要素を接合すれば、この半剛接要素に生じる変形増分は、塑性変形増分とまったく同じ考え方で得ることができる^{12),13)}。この半剛接要素の軸力、二方向のせん断力、ねじりモーメント、二軸曲げモーメントおよびそりモーメントに関するコンプライアンスをそれぞれ $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{44}, c_{55}, c_{66}, c_{77}$ とする。コンプライアンスはとりあえずそれぞれ独立であるとする。i 端の半剛接要素に生じる変形増分を dq_i^s で表すと、i 端の部材端力増分を dQ_i として次式が得られる。

$$dq_i^s = c_i dQ_i \quad (15)$$

ここに、

$$c_i = \begin{bmatrix} (c_{11})_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (c_{22})_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (c_{33})_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c_{44})_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{55})_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{66})_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{77})_i \end{bmatrix} \quad (16)$$

である。j 端についても同様の式が得られ、まとめて次式となる。

$$dq^s = cdQ \quad (17)$$

もし、半剛接要素の降伏関数が実験等によって得られれば、必要に応じて塑性理論を用いて相互作用効果をマトリクス c に導入することは、それほど難しくないとと思われる。

2. 5 弾塑性接線剛性行列

部材端変位増分 dq が、弾性変位増分 dq^e 、plastic hinge に生じる塑性変形増分 dq^p 、半剛接要素のコンプライアンスによる変形増分 dq^s の合計として生じると仮定すると、(18) 式に示す接線剛性 K^p が得られる。

$$dQ + R = [I + K^e [s^p + c]]^{-1} K^e dq \equiv K^p dq \quad (18)$$

ここに、 I は単位行列、 R は不平衡力である。数値解析は modified incremental stiffness method に従って、反復修正を行うことなく Ramm の変位増分法¹⁴⁾ で進める。各ステップで回転行列を用いて要素の座標変換行列を更新し、剛体変位成分を除去して両端の全変位を再評価する。不平衡力 R は、この全変位から現時点までの塑性変形増分と半剛接要素の変形増分の合計を差し引いて得られる弾性変位を用いて、陽な形で計算できる。

modified incremental stiffness method を適用した場合、変位増分が大きすぎると誤差が修正しきれなくなる恐れがある。本解法では以下の手順でこれに対処している。(1) 前ステップにおける

一般化ひずみ増分の大きさを全要素について求め、その最大値を得る。(2) 前ステップでの制御に用いた変位増分とこの一般化ひずみ増分の最大値を用いて、次ステップにおける一般化ひずみ増分の最大値が予め定められた基準値を越えないように、次ステップの制御用変位増分の大きさを定める。基準値としては、さまざまな試計算の結果をもとに各要素の初期降伏値の 0.01 倍を採用している。

3. Fukumoto らの I 形曲がりはりの解析

Fukumoto と Nishida には、I 形曲がりはりに関する有名な実験があり¹⁾、多くの研究者がこれを引用している。表 1 に、実験に使用された曲がりはりの各部寸法を示す。表中の S ははりの全長、 R は曲率半径、 D, B はそれぞれはり断面の高さと幅、 t_f はフランジ厚、 t_w はウェブ厚である。また、使用材料のヤング率 $E = 206.0\text{GPa}$ 、降伏応力 $\sigma_{y0} = 314.0\text{MPa}$ である。図 4(a) と (b) に、はりおよび断面の形状と本解析で設定した全体座標系 (X, Y, Z) の座標軸を示す。解析においては、材料の弾塑性域におけるひずみ硬化係数 H の値を、 $H = E/100(|\epsilon| \leq 5\sigma_{y0}/E)$ および $H = 3E/100(|\epsilon| > 5\sigma_{y0}/E)$ と仮定し、Pi ら⁴⁾ の用いた残留応力分布をそのまま採用した (図 4(c))。はりは両端で単純支持 (変位は三方向固定、断面二主軸回りの回転は自由) され、材軸回りの

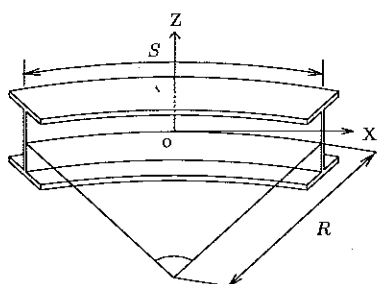
表 1 I 形曲がりはりの名称と各部の寸法

Beam	D (mm)	B (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	$S/8R$	S (m)
AR-1	251.6	101.6	8.4	5.6	1/109	1.7
AR-2	251.9	101.0	8.3	5.7	1/238	1.7
AR-3	251.9	100.9	8.3	5.8	1/798	1.7
BR-1	250.1	100.6	8.4	5.5	1/97	2.8
BR-2	251.8	100.6	8.3	5.7	1/206	2.8
BR-3	250.4	100.9	8.3	5.6	1/1379	2.8

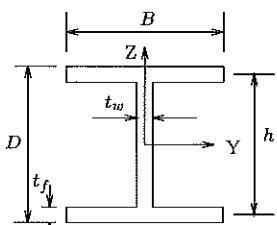
回転は拘束されているが、そり変形は両端ともに自由としてある¹⁾。荷重は、はり二等分点の上フランジの中央に厚さ 25mm の板を介して鉛直下方に載荷するようになっている。

解析に際しては、はりの全長を 16 の等長の要素でモデル化した。図 4(a) から明らかなように、はり端の断面主軸と全体座標軸の方向が一致しないため、一般には局所的な座標変換処置が必要となるが、本解析では以下の手順を踏むことによって、座標変換を行うことなく擬似的に境界条件を導入した。(1) はり両端の変位と回転をそり変形を除いてすべて拘束する。(2) はり両端の断面の二主軸回りの曲げに対するコンプライアンスを極力大きく設定する。

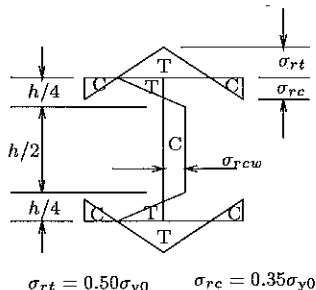
図 5 と図 6 は、それぞれ AR シリーズと BR シリーズのはりの中央集中荷重 Q と中央断面のねじれ角の絶対値 $|\phi_c|$ との関係の比較である。太い点線が Fukumoto らの実験値、細い破線が 140 個の ABAQUS シェル要素を用いた Tan らの解析結果、一点鎖線は 8 個の曲がりはり要素を用いた Pi らの解析結果、実線が本解析の結果である。本解析の結果は、AR シリーズでは荷重が高めに、また BR シリーズでは荷重が低めに出ているものの、全体として A



(a) Configuration



(b) Central cross-section



(c) Assumed residual stress distribution

図 4 Fukumoto らの I 形曲がりはりの形状と仮定された残留応力分布

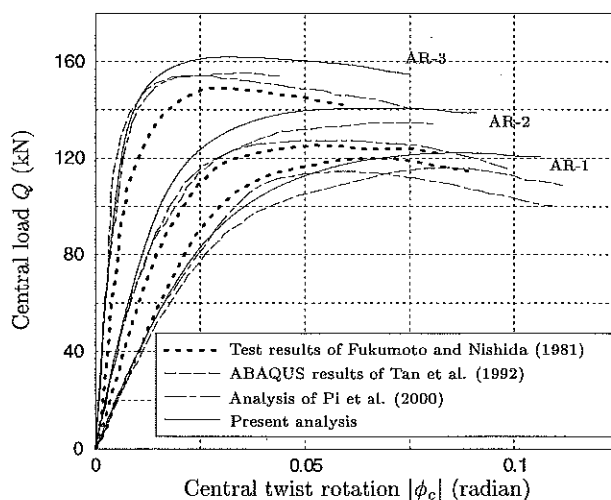


図 5 AR グループの $Q-|\phi_c|$ 関係の比較

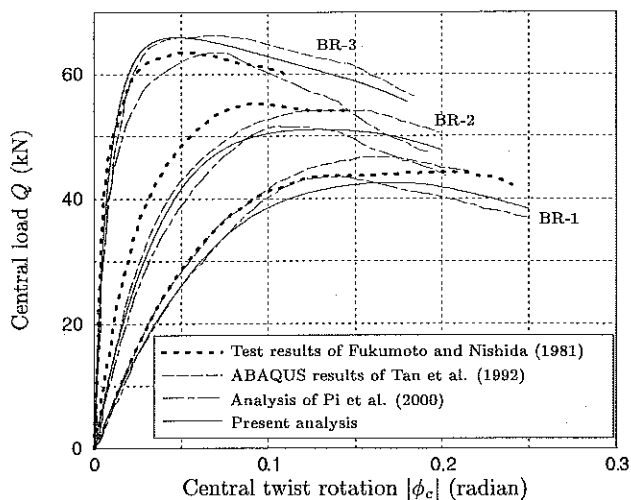


図6 BRグループの Q - $|\phi_c|$ 関係の比較

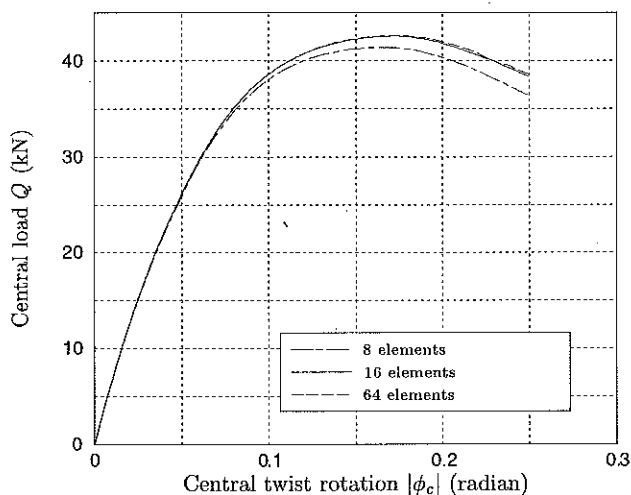


図7 BR-1の解析結果におよぼす要素分割数の影響

ABAQUSシェル要素の結果に傾向がよく似ている。実験値と解析値は荷重当初から剛性がかなり異なっており、文献1)に示された初期不整合値(表1の $S/8R$)に基づいて作成した解析モデルは、必ずしも実際の供試体の正確なモデルになっていない可能性が高い。これが実験値と解析値の相異の主な原因であると思われる。ともあれ、本解析法の要素モデルは簡素で汎用性の高い真直はり要素としては、曲がりはりに対しても実用的には十分な精度を有していると言えよう。

図7は、6本のはりの中で最も曲率の大きいBR-1を対象として、モデル化の際の要素数が解析結果の精度におよぼす影響を調べた結果である。16分割で充分収束した結果が得られている。

4. 結論

著者らが開発した、骨組の三次元的崩壊解析のための汎用性の高い真直はり要素を用いてI形曲がりほりを解析し、曲率を持つはりへの適用性と、曲げと不均一ねじりとの連成する問題での精度を調べた。結果として、本要素の半剛接機能を利用すれば、曲がりは

りの境界条件を局所的座標変換処理を行うことなく擬似的に導入可能なこと、解析結果もABAQUSシェル要素による精解に傾向の似た良好な精度のものが、水平面内に曲率を持つI形曲がりほりに特化して定式化された曲線要素の2倍程度の要素数で得られることを明らかにした。

参考文献

- 1) Fukumoto, Y., & Nishida, S. : Ultimate load behavior of curved I-beams, J. Engrg. Mech. Div., ASCE, 107(2), pp.367-385, 1981
- 2) Tan, L. O., Thevendran, V., Liew, J. Y. R., & Shanmugam, N. E. : Analysis and design of I-beams curved in plan, J. Singapore Struct. Steel Soc., Steel Struct., 3(1), pp.39-45, 1992
- 3) Liew, J. Y. R., Thevendran, V., Shanmugam, N. E., and Tan, L. O. : Behavior and design of horizontally curved steel beams, J. Constr. Steel Res., 32, pp.37-67, 1995
- 4) Pi, Y.-L., Bradford, M. A., & Trahair, N. S. : Inelastic analysis and behavior of steel I-beams curved in plan, J. Struct. Engrg., ASCE, 126(7), pp.772-779, 2000
- 5) Shugyo, M. : Elastoplastic analysis of 3D steel frames with semi-rigid joints, Report of the Faculty of Engrg. Nagasaki Univ., 31(57), pp.61-70, 2001
- 6) 修行 稔, 李 剣平 : コンクリート充填円形鋼管柱の非線形解析法に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, No.505, pp.147-152, 1998.3
- 7) 上谷宏二, 榎井 健 : 繰り返し曲げを受ける片持梁一柱の構面内挙動限界解析法, 日本建築学会構造系論文集, No.513, pp.97-104, 1998.11
- 8) 李 剣平, 修行 稔 : 構面外水平荷重の下で繰り返し水平力を受ける円形鋼管柱の構面外累積変形に関する実験的研究, 構造工学論文集, Vol.146B, pp.673-681, 2000.3
- 9) Stricklin, J. A., Haisler W. E., & von Riesenmann, W. A. : Geometrically nonlinear structural analysis by direct stiffness method, J. Struct. Div., ASCE, 97(9), pp.2299-2314, 1971
- 10) Crisfield, M. A. : Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol.2, Advanced Topics, John Wiley & Sons, 1997
- 11) Chen, W. F., & Atsuta, T. : Theory of Beam-Columns, Vol.2, McGraw-Hill, New York, 1977
- 12) 修行 稔, 岡 延夫, 李 剣平 : 半剛接合部を有する鋼立体骨組の弾塑性非線形解析, 日本建築学会構造系論文集, No. 480, pp.89-94, 1996.2
- 13) Shakourzadeh H, Guo, Y. Q., & Batoz J. L. : Modeling of connection in the analysis of thin-walled space frames, Comput. Struct., 71, pp. 423-433, 1999
- 14) Ramm, E.: The Riks/Wempner approach - an extension of the displacement control method in nonlinear analysis, Recent Advances in Nonlinear Computational Mechanics., Pineridge Press, pp. 63-86, 1982

(2002年12月9日原稿受理, 2003年1月30日採用決定)