平成27年度　入学試験問題

数　学

注意事項

試験開始後，問題冊子及び答案用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 各志願者は，下の表に指示した問題を解答すること。
3. 解答は，必ず問題と同じ番号の答案用紙のおもて面に記入すること。
4. 解答は明瞭に書くこと。
5. 答案用紙は持ち出さないこと。

志望学部	問題の番号			
教育学部	3	4	5	7
経済学部	1	2		
医学部	3	4	5	8
歯学部	3	4	5	6
薬学部	3	4	5	7
工学部	3	4	5	6
環境科学部	1	2		
水産学部	1	2		

$\boxed{1}$ 2つの放物線 $C_1: y = x^2$，$C_2: y = x^2 - 2ax + 2a^2$ を考える。ただし，$a > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_2 の頂点の座標を a を用いて表せ。

(2) 2つの放物線 C_1，C_2 の共通接線を ℓ とし，C_1 と ℓ との接点の x 座標を p，C_2 と ℓ との接点の x 座標を q とする。p と q の値および ℓ の方程式を，それぞれ a を用いて表せ。

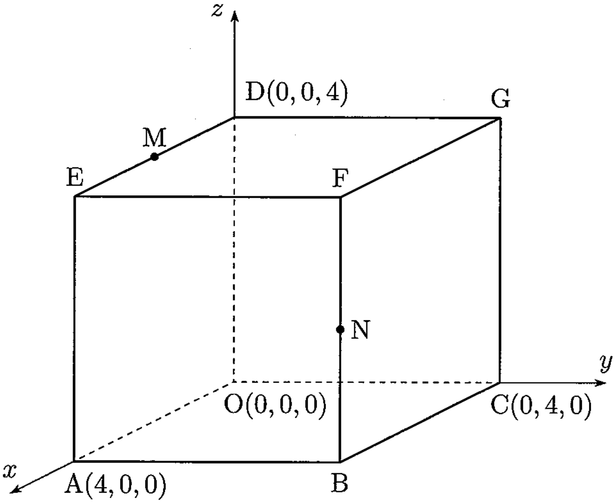
(3) 放物線 C_1，C_2 および接線 ℓ によって囲まれた図形の面積を S_1 とする。S_1 を a を用いて表せ。

(4) 点 $\left(-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a^2}{4}\right)$ における C_1 の接線を m とする。このとき，m の方程式を a を用いて表せ。また，m と接線 ℓ との交点の x 座標を求めよ。

(5) 放物線 C_1 および接線 ℓ，m によって囲まれた図形の面積を S_2 とする。S_2 を a を用いて表せ。さらに，$\dfrac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ。

（下書き用紙）

2 4点 O$(0,0,0)$，A$(4,0,0)$，C$(0,4,0)$，D$(0,0,4)$ をとり，下図のように線分 OA, OC，OD を3辺とする立方体 OABC–DEFG を考える。辺 DE, BF の中点を，それぞれ M, N とする。以下の問いに答えよ。



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{GM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{GN}}$ を成分で表せ。

(2) $\angle\mathrm{MGN} = \theta$ とする。$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) 3点 G，M，N を頂点とする三角形 GMN の面積を求めよ。

(4) 三角錐(すい) FGMN において，三角形 GMN を底面としたときの高さを求めよ。

(5) 三角形 GMN を 含む平面と線分 OF との交点を P とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を用いて表せ。

（下書き用紙）

3 放物線 $C: y = x^2$ 上に異なる 2 点 P，Q をとる。P，Q の x 座標をそれぞれ p，q（ただし，$p < q$）とする。直線 PQ の傾きを a とおく。以下の問いに答えよ。

(1) a を p，q を用いて表せ。

(2) $a = 1$ とする。直線 PQ と x 軸の正の向きとのなす角 θ_1（ただし，$0 < \theta_1 < \pi$）を求めよ。

(3) $a = 1$ とする。放物線 C 上に点 R をとる。R の x 座標を r（ただし，$r < p$）とする。三角形 PQR が正三角形になるとき，直線 PR と x 軸の正の向きとのなす角 θ_2（ただし，$0 < \theta_2 < \pi$）を求めよ。また，このとき直線 PR の傾き，および直線 QR の傾きを，それぞれ求めよ。さらに，正三角形 PQR の面積を求めよ。

(4) $a = 2$ とする。放物線 C 上に点 S(1, 1) をとる。三角形 PQS が $\angle \mathrm{S} = \dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形になるとき，この三角形の面積を求めよ。

（下書き用紙）

4 ひし形の紙がある（図 1）。点線で半分に折ると正三角形になった（図 2）。これを少し開いて机の上に立てると，三角錐の形になる（図 3）。その高さを次のようにして求めたい。

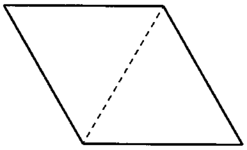


図 1

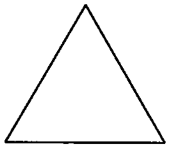


図 2

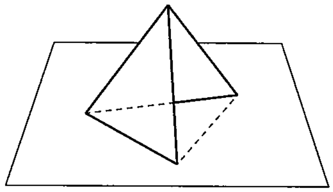


図 3

図 4 において，2 つの正三角形 OAB と OAC の 1 辺の長さを 1 とする。点 O と平面 ABC の距離が，三角錐 OABC の高さになる。

空間ベクトルを利用してこの高さを求める。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ とおき，線分 BC の中点を M とする。以下の問いに答えよ。

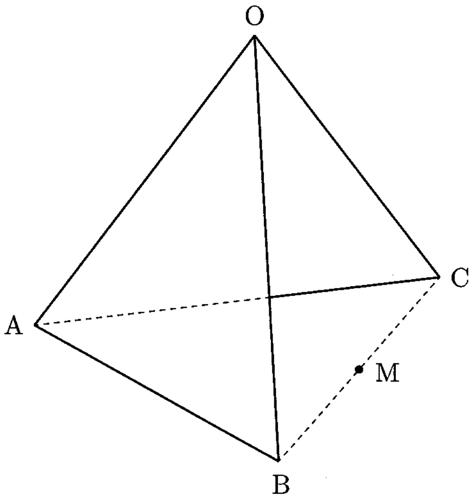


図 4（図 3 の拡大図）

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。また，$|\vec{b}+\vec{c}|^2$ の値を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(3) 実数 t に対して $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とおくと，点 H は直線 AM 上にある。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立つことを示せ。さらに，H が $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を満たす点であるとき，t の値を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(4) 三角錐 OABC の高さを h とする。h を $\cos\theta$ を用いて表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が成り立つとき，θ と h の値を求めよ。

（下書き用紙）

5 以下の問いに答えよ。

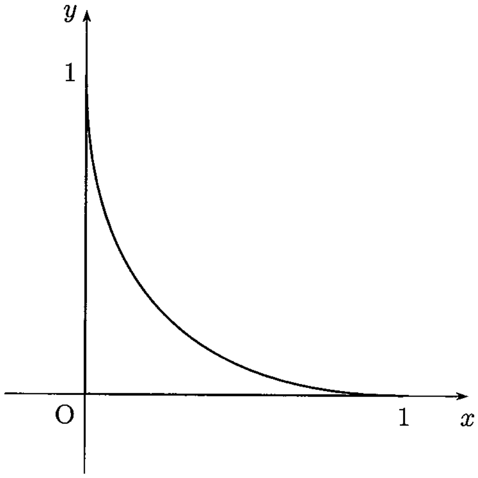
(1) 次の関係式によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，一般項 a_n と $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - (\sqrt{2}+1)a_n = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

(2) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

(3) 曲線 C: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸および y 軸で囲まれた下図の図形を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。



（下書き用紙）

6 実数 $x \neq 1$ について定義される関数

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to1-0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to1+0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ。

(3) x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。曲線 $y = f(x)$ 上の格子点の座標をすべて求めよ。

(4) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。

(5) $x \leqq 0$ かつ $y \geqq 0$ で表される領域において，x 軸と y 軸および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

（下書き用紙）

7 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ 上で定義される関数

$$f(x) = \cos 2x - 4\sin^3 x$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ の解を求めよ。

(4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

（下書き用紙）

8 自然対数の底を e とする。区間 $x \geqq 0$ 上で定義される関数

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

を考え，曲線 $y = f(x)$ と x 軸との交点を，x 座標の小さい順に並べる。それらを，P_0，P_1，P_2，$\cdots$ とする。点 P_0 は原点である。

自然数 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して，線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P_n の x 座標を求めよ。

(2) 面積 S_n を求めよ。

(3) $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ とする。このとき，I_n と $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めよ。

（下書き用紙）