平成28年度 入学試験問題

数学

注意事項

試験開始後，問題冊子及び解答用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 各志願者は，下の表 (1) に指示した問題を解答すること。ただし，教育学部については志望するコース（専攻）により，下の表 (2) のように分類する。
3. 解答は，必ず問題と同じ番号の解答用紙のおもて面に記入すること。
4. 解答は明瞭に書くこと。
5. 解答用紙は持ち出さないこと。

表 (1)

志望学部	問題の番号
教育学部A 経済学部 環境科学部 水産学部	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
教育学部B 薬学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$
医学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
歯学部 工学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

表 (2)

分類	志望するコース（専攻）
教育学部A	小学校教育コース 幼稚園教育コース（こども保育専攻） 特別支援教育コース 中学校教育コース（社会専攻，技術専攻）
教育学部B	中学校教育コース（数学専攻）

1 以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2-x$ の頂点を P とする。点 Q はこの放物線上の点であり，原点 $\mathrm{O}(0,0)$ とも 点 P とも異なるとする。$\angle\mathrm{OPQ}$ が直角であるとき，点 Q の座標を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ は以下の条件（イ），（ロ），（ハ）を満たす。そのような正の数 a の値と $f(x)$ を求めよ。

（イ） $f'(x)=x^2+ax$

（ロ） $f(0)=-1$

（ハ） $f(x)$ の極大値と極小値の差が $\dfrac{4}{81}$

(3) 方程式

$$2(\log_2 x)^2-7|\log_2 x|-4=0$$

を解け。

(4) $0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，不等式

$$\sin 3x+\sin 2x<\sin x$$

を解け。

（下書き用紙）

2 空間において，3 点 $\mathrm{A}(5,0,1)$，$\mathrm{B}(4,2,0)$，$\mathrm{C}(0,1,5)$ を頂点とする三角形 ABC がある。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 AB，BC，CA の長さを求めよ。

(2) 三角形 ABC の面積 S を求めよ。

(3) 原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \ell\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくとき，実数 ℓ，m の値を求めよ。

(4) 直線 AH と直線 BC の交点を M とする。$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくとき，実数 k の値と三角形 HBC の面積 T を求めよ。

(5) 原点 O を頂点，四角形 ABHC を底面とする四角錐（すい） O-ABHC の体積 V を求めよ。

（下書き用紙）

3 半径 1 の円に内接する正十二角形 D がある。その面積を S とする。D の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_1 をつくる。さらに，D_1 の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_2 をつくる。このように，D_{n-1} の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_n をつくる $(n \geqq 2)$。D_n の面積を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) S と S_1 を求めよ。

(2) S_n を n の式で表せ $(n \geqq 1)$。

(3) $S_n \leqq \dfrac{1}{2}S$ となる最小の整数 n を求めよ。ただし，

$$1.89 < \log_2\left(2+\sqrt{3}\right) < 1.9$$

である。

（下書き用紙）

4 1辺の長さが2の立方体 ABCD-EFGH がある。下の図1のように，2辺 BC, CD 上に，$\mathrm{BS}=\mathrm{CT}=x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を満たす点 S, T をとる。このとき，三角形 EST の面積の最大値と最小値を求めたい。以下の問いに答えよ。

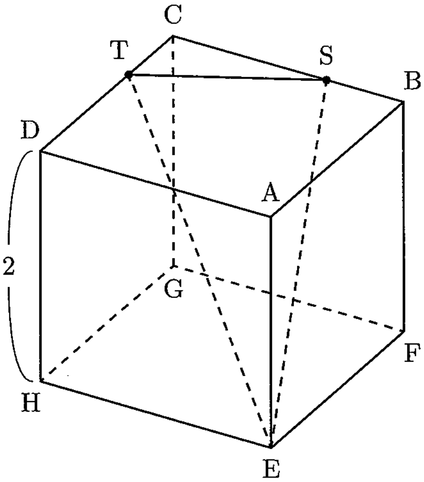

図1

(1) 右の図2を参考にして，三角形 OPQ において $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおくとき，三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ。

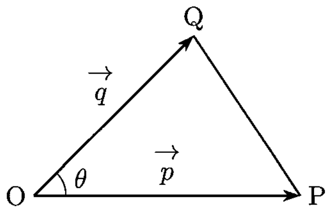

図2

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\vec{c}$ とおく。立方体の1辺の長さが2であることに注意して，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および x を用いて表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2$, $|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2$ を，それぞれ x の式として表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ は，x によらない一定の値になることを示せ。

(3) 上の(1)を利用して三角形 EST の面積 $f(x)$ を求めよ。

(4) $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値も答えよ。

（下書き用紙）

5 以下の問いに答えよ。

(1) 関数

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

の増減を調べ, y のとり得る値の範囲を求めよ。また, この関数の逆関数を求めよ。

(2) 定積分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$$

について, I_1, I_2, I_3 を求めよ。

(3) 関数

$$f(x) = \frac{1 + \log x}{x} \qquad (x > 0)$$

がある。曲線 $C\colon y = f(x)$ の変曲点を $\mathrm{P}(a, f(a))$ とする。曲線 C と直線 $x = a$, および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

（下書き用紙）

6 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，2 つの関数 $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ を考える。曲線 $C_1\colon y = f(x)$ と曲線 $C_2\colon y = g(x)$ で囲まれた図形を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，その最大値と最小値を求めよ。

(2) 曲線 C_1 は曲線 C_2 と原点に関して対称であることを示せ。

(3) 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x)$ と $-g(x)$ の値の大小関係を調べよ。また，$g(x) \geqq 0$ が成り立つような x の範囲を求めよ。

(4) 図形 D の $x \geqq 0$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

（下書き用紙）

$\boxed{7}$ 関数 $f(x) = xe^x$ で定まる曲線 $C\colon y = f(x)$ を考える。p を正の数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ。また，すべての x について

$$\{(ax+b)e^x\}' = f(x)$$

が成り立つような定数 a，b の値を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p, f(p))$ における C の接線を $\ell\colon y = c(x-p)+d$ とする。c と d の値を p を用いて表せ。さらに，区間 $x \geqq 0$ において関数 $g(x) = f(x) - \left\{c(x-p)+d\right\}$ の増減を調べ，不等式

$$f(x) \geqq c(x-p)+d \qquad (x \geqq 0)$$

が成り立つことを示せ。

(3) $x \geqq 0$ の範囲で，曲線 C と接線 ℓ，および y 軸で囲まれた図形を F とする。その面積 $S(p)$ を求めよ。

(4) 2 辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 R を考える。R が図形 F を囲んでいるとき，R の面積の最小値 $T(p)$ を求めよ。さらに，$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ。

（下書き用紙）

8 楕円（だえん） $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>0)$ と y 軸の交点を $\mathrm{A}(0,a)$，$\mathrm{B}(0,-a)$ とする。θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{P}(\cos\theta, a\sin\theta)$ はこの楕円上を動く。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 AP の長さを ℓ とする。$X=\sin\theta \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$Y=\ell^2$ となる関数を $Y=f(X)$ とする。$f(X)$ を X の式で表せ。

(2) $0<a<1$ の場合。

(1) の関数 $f(X)$ の最大値を a を用いて表し，そのときの X の値を求めよ。

(3) $a=2$ の場合。

(1) の関数 $f(X)$ の値が最大となるときの点 P を P_1 とする。$f(X)$ の最大値と P_1 の座標を求めよ。また，点 $\mathrm{A}(0,2)$ を中心とし点 P_1 を通る円を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

（下書き用紙）