

# 平成 30 年 度 入 学 試 験 問 題

## 数 学

### 注 意 事 項

試験開始後、問題冊子及び解答用紙のページを確かめ、落丁、乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 試験開始後は、すべての解答用紙に受験番号・氏名を記入すること。
3. 各志願者は、下の表(1)に指示した問題を解答すること。ただし、教育学部については志望するコース(専攻)により、下の表(2)のように分類する。
4. 解答は、必ず問題と同じ番号の解答用紙のおもて面に記入すること。
5. 解答は明瞭に書くこと。
6. 解答用紙は持ち出さないこと。

表(1)

志 望 学 部	問 題 の 番 号			
教育学部 A 経済学部 環境科学部 水産学部	1	2		
教育学部 B 薬学部	3	4	5	7
医学部	3	4	7	8
歯学部 工学部	3	4	5	6

表(2)

分 類	志 望 す る コ ー ス ( 専 攻 )
教育学部 A	小学校教育コース
	幼稚園教育コース(こども保育専攻)
	特別支援教育コース
	中学校教育コース(社会専攻, 技術専攻)
教育学部 B	中学校教育コース(数学専攻)

**1**

以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{6}$  の極値を求めよ。さらに、3次方程式  $f(x) = k$  が、異なる正の解を2個、負の解を1個もつように、定数  $k$  の値の範囲を定めよ。
- (2)  $0 < \theta < \pi$  で  $\tan \theta = -2\sqrt{2}$  のとき、 $\cos \theta$  と  $\cos \frac{\theta}{2}$  の値を求めよ。
- (3) 数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする。

$$S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つとき、初項  $a_1$  および一般項  $a_n$  を求めよ。

- (4) 座標平面上に原点  $O$ 、点  $A(5, 2)$ 、点  $B(11, 10)$  がある。条件  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$  を満たす点  $P(x, y)$  の軌跡を求めよ。さらに、 $|\overrightarrow{OP}|$  の最大値と最小値、およびそのときの  $P$  の座標をそれぞれ求めよ。

(下書き用紙)

**2** 関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ 2x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

と定義する。曲線  $C: y = f(x)$  の上に 2 点  $A(-a, a^2)$ ,  $B(a, 2a^2)$  がある。ただし、 $a$  は正の定数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線  $AB$  の方程式を求めよ。また、線分  $AB$  の長さを求めよ。
- (2) 曲線  $C$  と直線  $AB$  で囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ。
- (3) 2 点  $A$ ,  $B$  における曲線  $C$  の接線を、それぞれ  $l$ ,  $m$  とする。 $l$ ,  $m$  の方程式を求めよ。さらに、 $l$  と  $m$  の交点  $D$  の座標を求めよ。
- (4) 直線  $AB$  と直線  $l$  が直交するように、 $a$  の値を定めよ。このとき、曲線  $C$  と 2 直線  $l$ ,  $m$  とで囲まれる図形の面積  $T$  を求めよ。

(下書き用紙)

**3**

以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

- (1) 数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする。

$$S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つとき、初項  $a_1$  および一般項  $a_n$  を求めよ。

- (2)  $\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = A$  とするとき、

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2$$

の値を  $A$  を用いて表せ。

- (3) 方程式

$$\log_2 x^2 = 2 + \log_2 |x - 2|$$

を解け。

- (4) 関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

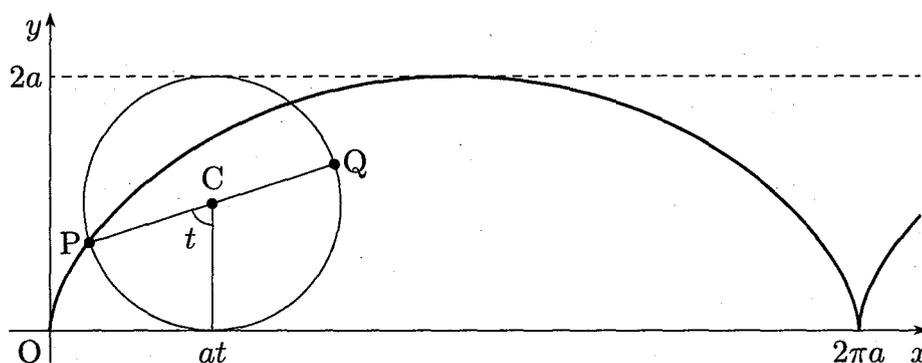
と定義する。「微分係数の定義」にしたがって、 $f(x)$  の  $x = 0$  における微分係数を求めよ。

(下書き用紙)

- 4 半径  $a$  の円が  $x$  軸上を滑ることなく正の方向に回転していくとき、円周上の2つの定点  $P$  と  $Q$  の運動について考える。時刻  $t=0$  のとき  $P$  は原点  $O$  にあり、 $Q$  は点  $(0, 2a)$  にある。円は毎秒 1 ラジアンで回転する。このとき、点  $P$  の時刻  $t$  における座標  $(x, y)$  は

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

で表される。以下の問いに答えよ。



(参考図)

- (1) 時刻  $t$  における円の中心  $C$  と点  $Q$  の座標を、それぞれ求めよ。
- (2) 時刻  $t$  における点  $P$  の速度ベクトル  $\vec{v}_P = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$  を求めよ。また、時刻  $t$  が  $0 \leq t \leq 2\pi$  の範囲において、速さ  $|\vec{v}_P|$  の最大値と最小値、およびその時の  $P$  の座標を求めよ。
- (3) 時刻  $t$  における点  $Q$  の速度ベクトル  $\vec{v}_Q$  を求めよ。さらに、内積  $\vec{v}_P \cdot \vec{v}_Q$  を求めよ。
- (4) 時刻  $t = \frac{\pi}{2}$  から  $t = \frac{3\pi}{2}$  までの間に点  $P$  が動く道のり  $L_P$  と、点  $Q$  が動く道のり  $L_Q$  を、それぞれ求めよ。

(下書き用紙)

**5**

関数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$  がある。曲線  $C: y = f(x)$  の変曲点を  $P$  とする。以下の問いに答えよ。

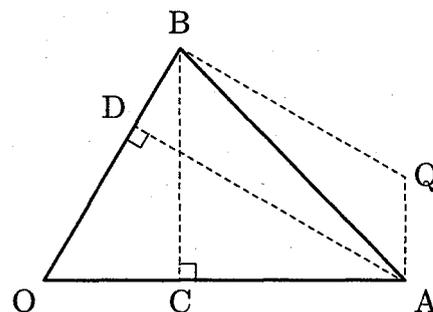
- (1) 関数  $y = f(x)$  の増減および凹凸を調べ、極値および  $P$  の座標を求めよ。
- (2) 曲線  $C$  上の点  $P$  における接線を  $l$  とする。また、 $P$  を通り  $l$  に垂直な直線を  $m$  とする。 $l, m$  の方程式を求めよ。
- (3) 直線  $m$  と曲線  $C$  との交点で、 $P$  と異なる点を  $Q, R$  とする。ただし、 $Q$  の  $x$  座標は  $R$  の  $x$  座標より小さいものとする。このとき、 $C$  と線分  $PR$  とで囲まれる図形  $F$  の面積  $S$  を求めよ。
- (4)  $P$  を通り、図形  $F$  の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ。

(下書き用紙)

**6** 三角形 OAB において

$$OA = a, \quad OB = b, \quad \angle O = \theta$$

とおく。ただし、 $0 < b \leq a$ ,  $0 < \theta < \pi$  である。また、点 C と D は、それぞれ、直線 OA と OB 上にあり、 $CB \perp OA$ ,  $DA \perp OB$  を



(参考図)

満たす。 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  とするとき、この三角形の外心 P について調べる。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{OC}$  を  $a, b, \theta, \vec{a}$  を用いて表せ。また、 $\vec{OD}$  を  $a, b, \theta, \vec{b}$  を用いて表せ。
- (2) OA の A を通る垂線と、OB の B を通る垂線との交点を Q とする。このとき、 $\vec{AQ} = l\vec{CB}$ ,  $\vec{BQ} = m\vec{DA}$  となる実数  $l, m$  がある。 $\vec{OA} + \vec{AQ} = \vec{OB} + \vec{BQ}$  であることに注意して、 $l$  と  $m$  の値を  $a, b, \theta$  を用いて表せ。
- (3) Q が (2) の点であるとき、

$$\vec{OQ} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

となる実数  $p, q$  がある。 $p$  と  $q$  の値を  $a, b, \theta$  を用いて表せ。また、

$$\vec{OP} = r\vec{a} + s\vec{b}$$

を満たす  $r$  と  $s$  の値を  $a, b, \theta$  を用いて表せ。

(下書き用紙)

**7**  $t$  を正の実数とし、複素数平面上に 2 点  $A(t)$ ,  $B\left(-\frac{1}{t}\right)$  がある。等式

$$t\left|z + \frac{1}{t}\right| = \frac{1}{t}|z - t| \quad (\text{a})$$

を満たす点  $P(z)$  の全体が表す図形を  $F$  とする。下の小問 (1) から (4) を通して  $F$  がどのような図形を表すか調べたい。以下の問いに答えよ。

- (1)  $A$  と  $B$  はどちらも図形  $F$  の点ではないことを示せ。
- (2)  $t = 1$  ならば、 $F$  はどのような図形を表すか。
- (3)  $t \neq 1$  とする。図形  $F$  の点  $P(z)$  が直線  $AB$  上に位置するような  $z$  の値は 2 つある。その値  $z_1$  と  $z_2$  を求めよ。ただし、 $|z_1| < |z_2|$  とする。
- (4)  $t \neq 1$  とする。2 点  $P_1(z_1)$ ,  $P_2(z_2)$  を結ぶ線分の中点を  $M(m)$  として、 $m$  の値を求めよ。また、 $P(z)$  が図形  $F$  の点であるとき、 $|z - m|$  の値を求めよ。さらに、 $F$  はどのような図形を表すか。

(下書き用紙)

8

積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

について、以下の問いに答えよ。ただし、 $0! = 1$  と定める。

- (1) 部分積分を利用して、 $F_2(x)$  を  $F_1(x)$  を用いて表せ。同様に、 $F_1(x)$  を  $F_0(x)$  を用いて表せ。
- (2)  $F_0(x)$  を計算し、積分を含まない式として表せ。その結果を利用して、 $F_1(x)$  を積分を含まない式として表せ。さらに、 $F_2(x)$  を積分を含まない式として表せ。
- (3)  $n \geq 1$  のとき、 $F_n(x)$  を  $F_{n-1}(x)$  を用いて表せ。さらに、 $n \geq 0$  のとき、 $F_n(x)$  を積分を含まない式として表せ。
- (4)  $p(x) = x^n$  とおくとき、 $k$  次導関数

$$p^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

を求めよ。そして、

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt = n! - e^{-x} \sum_{k=0}^n p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $p^{(0)}(x) = p(x)$  と定める。

平成 30 年度入学試験問題

問題補足（数学）

<問題補足>

数学 15 ページ 問題8の3行目

「・・・。ただし、 $0! = 1$  と定める。」

の続きに

「また、関数  $y = t^0$  は、関数  $y = 1$  を意味する。」

を追加する。

(下書き用紙)