$\boxed{1}$

(1)　$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$　より$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

つまり，　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$y=(t^2-1)-\sqrt{2}t+1=t^2-\sqrt{2}t=\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

$y$は$t$に関する２次関数で、グラフは軸が$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$の下に凸の放物線である。

したがって$y$の最小は、$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$で　最小値$-\frac{1}{2}$　そのとき　$x=\frac{7\pi}{12}$

最大は、$t=-1$　で　最大値$1+\sqrt{2}$ そのとき　$x=\pi$

(2)　円C: $x^2+y^2=5$ と直線$l$: $x+3y-5=0$ から、

$10y^2-30y+20=0$

$(y-1)(y-2)=0$　よって　$y=1$, $y=2$

$y=1$ のとき，$x=2$　　$y=2$ のとき，$x=-1$

A$(-1, 2)$，B$(2, 1)$

接線$l_1$: $-x+2y=5$，$l_2$: $2x+y=5$

接線の交点は、P$(1, 3)$

今、OP$=\sqrt{10}$ より，　PQ･PR$=(\mathrm{OP}-\sqrt{5})(\mathrm{OP}+\sqrt{5})=10-5=5$

(3)　$S(1)=\int_0^1 |x^2-1|\,dx=\int_0^1(-x^2+1)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{2}{3}$

$$S(t)=\int_0^1|x^2-t^2|\,dx=\int_0^t|x^2-t^2|\,dx+\int_t^1|x^2-t^2|\,dx$$

$$=\int_0^t(-x^2+t^2)dx+\int_t^1(x^2-t^2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+t^2x\right]_0^t+\left[\frac{x^3}{3}-t^2x\right]_t^1=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$$

$S'(t)=4t^2-2t=4t\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$S'(t)=0$　は，　$t=0\,,\,t=\frac{1}{2}$

$S(t)$ の増減表は，

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $S(t)$ | $\frac{1}{3}$ | ↘ | $\frac{1}{4}$ | ↗ | $\frac{2}{3}$ |

最小値は$\frac{1}{4}$　$\left(t=\frac{1}{2}\right)$　　最大値は$\frac{2}{3}$　$(t=1)$

$\boxed{2}$

(1) $\overrightarrow{OL}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}$　，$\overrightarrow{OM}=\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}$

$\overrightarrow{OR}=x\overrightarrow{OL}+y\overrightarrow{OM}=x(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d})+y(\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d})$

$=x\vec{a}+y\vec{c}+(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4})\vec{d}$

$|\overrightarrow{OL}|^2=\left|\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right|^2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$　よって　$|\overrightarrow{OL}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$|\overrightarrow{OM}|^2=\left|\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}\right|^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$ よって　$|\overrightarrow{OM}|=\frac{5}{4}$

$\overrightarrow{OL}\cdot\overrightarrow{OM}=(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d})\cdot(\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d})=\frac{3}{8}$

(2) $\cos\angle LOM=\frac{\overrightarrow{OL}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OL}||\overrightarrow{OM}|}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5}{4}}=\frac{3}{5\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{25}$

$\triangle LOM=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OL}||\overrightarrow{OM}|\sin\angle LOM=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\sqrt{1-(\frac{3\sqrt{5}}{25})^2}$

$=\frac{5\sqrt{5}}{16}\sqrt{1-\frac{9}{125}}=\frac{1}{16}\sqrt{116}=\frac{\sqrt{29}}{8}$

(3) $\overrightarrow{OP}=\vec{a}+p\vec{c}+\vec{d}$

点P は平面T 上にあるので，$\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\vec{c}+(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4})\vec{d}$　と表せる。

$\vec{a},\vec{c},\vec{d}$　は一次独立だから　$x=1$，$y=p$，$\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}=1$

したがって　$x=1$，$y=\frac{2}{3}$，$p=\frac{2}{3}$　　よって，　$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}+\vec{d}$

同様に，$\overrightarrow{OQ}=q\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$

点Qは平面T上にあるので，$\overrightarrow{OQ}=x\vec{a}+y\vec{c}+(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4})\vec{d}$　と表せる。

$\vec{a},\vec{c},\vec{d}$　は一次独立だから　$x=q$，$y=1$，$\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}=1$

したがって　$x=\frac{1}{2}$，$y=1$，$q=\frac{1}{2}$　よって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$

(4)( また，$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OM}=(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})-(\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d})$

$=(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{d})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OL}$　よって　$\overrightarrow{OL}\parallel\overrightarrow{MQ}$

同様に，$\overrightarrow{LP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OL}=(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}+\vec{d})-(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d})$

$=\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{2}{3}(\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d})=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ よって　$\overrightarrow{OM}\parallel\overrightarrow{LP}$

$\overrightarrow{OL}\parallel\overrightarrow{MQ}$　，$\overrightarrow{OM}\parallel\overrightarrow{LP}$

直線LPと　MQとの交点Rとする。四角形OMRLは平行四辺形である。

MQ : QR ＝1 ; 1

LP : PR＝2 : 1

$\triangle RQP=\frac{1}{6}\triangle RLM=\frac{1}{6}\triangle OLM$

五角形OLPQM＝△OLM＋ 四角形LPQM

$=\triangle OLM+\frac{5}{6}\triangle OLM=\frac{11}{6}S=\frac{11}{6}\cdot\frac{\sqrt{29}}{8}=\frac{11\sqrt{29}}{48}$

3

(1) $y=-2(\log_3 3x)^3+3(\log_3 x+1)^2+1$

$\quad=-2(\log_3 x+1)^3+3(\log_3 x+1)^2+1$

$t=\log_3 x+1$ とする。

$y=-2t^3+3t^2+1$

$\frac{1}{3}\leqq x\leqq 3$ より　$-1\leqq\log_3 x\leqq 1$　よって$0\leqq t\leqq 2$

$y'=-6t^2+6t=-6t(t-1)$

$y'=0$ より　$t=0,\ t=1$

| $t$ | 0 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | ＋ | 0 | － | |
| $y$ | 1 | ↗ | 2 | ↘ | $-3$ |

最大値は　２　$x=1$

最小値は－３　$x=3$

(2)　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$　より

$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

したがって

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ と比較して，　$\alpha+\beta=5$，$\alpha\beta=6$

これより　$\alpha=2$，$\beta=3$　　$\alpha=3$，$\beta=2$ の２通りがある。

数列$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$は，初項$a_2-\alpha a_1$で，公比$\beta$の等比数列だから，一般項は，

$a_1=1,\ a_2=4$　より

$a_{n+1}-\alpha a_n=(4-\alpha)\cdot\beta^{n-1}$

$\alpha=2$，$\beta=3$　のとき，　$a_{n+1}-2a_n=2\cdot 3^{n-1}$ ・・・①

$\alpha=3$，$\beta=2$　のとき，　$a_{n+1}-3a_n=1\cdot 2^{n-1}$ ・・・②

よって　①　②より

$a_n=2\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2\cdot 3^{n-1}-2^{n-1})=\lim_{n\to\infty}3^{n-1}\left(2-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)=+\infty$$

数列$\{a_n\}$は発散する。

(3) $f(x)=2+\int_0^x \sin(x-t)f(t)dt\ =2+\sin x\int_0^x \cos t\,f(t)dt-\cos x\int_0^x \sin t\,f(t)dt$

$f'(x)=\cos x\int_0^x \cos t\,f(t)dt+\sin x\cos x\,f(x)\ +\sin x\int_0^x \sin t\,f(t)dt-\cos x\sin x\,f(x)$

$=\cos x\int_0^x \cos t\,f(t)dt\ +\sin x\int_0^x \sin t\,f(t)dt$

$f''(x)=-\sin x\int_0^x \cos t\,f(t)dt+\cos^2 x\,f(x)+\cos x\int_0^x \sin t\,f(t)dt+\sin^2 x\,f(x)$

$=f(x)-\{\sin x\int_0^x \cos t\,f(t)dt-\cos x\int_0^x \sin t\,f(t)dt\}$

$=f(x)-(f(x)-2)=2$

$f(0)=2$ , $f'(0)=0$

したがって　$f'(x)=2x+C_1$

$f'(0)=0$ より $C_1=0$　　$f'(x)=2x$

$f(x)=x^2+C_2$

$f(0)=2$ より $C_2=2$　　$f(x)=x^2+2$

$\boxed{4}$ 1）　$\overrightarrow{OL}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}$, $\overrightarrow{OM}=\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}$

$$\overrightarrow{OR}=x\overrightarrow{OL}+y\overrightarrow{OM}=x\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)+y\left(\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}\right)=x\vec{a}+y\vec{c}+\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)\vec{d}$$

$|\overrightarrow{OL}|^2=\left|\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right|^2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$　よって　$|\overrightarrow{OL}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$|\overrightarrow{OM}|^2=\left|\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}\right|^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$ よって　$|\overrightarrow{OM}|=\frac{5}{4}$

$\overrightarrow{OL}\cdot\overrightarrow{OM}=\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}\right)=\frac{3}{8}$

$$\cos\angle LOM=\frac{\overrightarrow{OL}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OL}||\overrightarrow{OM}|}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5}{4}}=\frac{3}{5\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{25}$$

$$\triangle LOM=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OL}||\overrightarrow{OM}|\sin\angle LOM=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{5}}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{29}}{8}$$

(2)　$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+p\vec{c}+\vec{d}$

点Pは平面T上にあるので，$\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\vec{c}+\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)\vec{d}$　と表せる。

$\vec{a},\vec{c},\vec{d}$　は一次独立だから　$x=1$，$y=p$，$\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}=1$

したがって　$x=1$，$y=\frac{2}{3}$，$p=\frac{2}{3}$　　よって，　$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}+\vec{d}$

同様に，$\overrightarrow{OQ}=q\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$

点Qは平面T上にあるので，$\overrightarrow{OQ}=x\vec{a}+y\vec{c}+\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)\vec{d}$　と表せる。

$\vec{a},\vec{c},\vec{d}$　は一次独立だから　$x=q$，$y=1$，$\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}=1$

したがって　$x=\frac{1}{2}$，$y=1$，$q=\frac{1}{2}$　よって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$

(3) $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OM}=(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})-(\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d})$

$=(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{d})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OL}$　よって　$\overrightarrow{OL}\,/\!/\,\overrightarrow{MQ}$

$\overrightarrow{LP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OL}=(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}+\vec{d})-(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d})$

$=\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{2}{3}(\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d})=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ よって　$\overrightarrow{OM}\,/\!/\,\overrightarrow{LP}$

直線LP とMQ との交点R とする。四角形OMRL は平行四辺形である。

MQ : QR ＝1 ; 1　　LP : PR＝2 : 1　　$\triangle RQP=\frac{1}{6}\triangle RLM=\frac{1}{6}\triangle OLM$

五角形OLPQM＝△OLM＋ 四角形LPQM

$=\triangle OLM+\frac{5}{6}\triangle OLM=\frac{11}{6}S=\frac{11}{6}\cdot\frac{\sqrt{29}}{8}=\frac{11\sqrt{29}}{48}$

(4)点H は，平面T 上にあるので，$\overrightarrow{OH}=x\vec{a}+y\vec{c}+(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4})\vec{d}$

$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OD}=x\vec{a}+y\vec{c}+(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}-1)\vec{d}$

$\overrightarrow{OL}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}$ , $\overrightarrow{OM}=\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}$

$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{OL}$ , $\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{OM}$ より

$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{OL}=x+\frac{x}{4}+\frac{3y}{8}-\frac{1}{2}=0$　よって$10x+3y-4=0$

$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{OM}=y+\frac{3x}{8}+\frac{9y}{16}-\frac{3}{4}=0$　よって$6x+25y-12=0$

$x=\frac{8}{29}$ , $y=\frac{12}{29}$　　より　$\overrightarrow{OH}=\frac{8}{29}\vec{a}+\frac{12}{29}\vec{c}+\frac{13}{29}\vec{d}$

$\overrightarrow{DH}=\frac{8}{29}\vec{a}+\frac{12}{29}\vec{c}-\frac{16}{29}\vec{d}=\frac{4}{29}(2\vec{a}+3\vec{c}-4\vec{d})$

$|\overrightarrow{DH}|=\frac{4}{29}|2\vec{a}+3\vec{c}-4\vec{d}|=\frac{4}{29}\sqrt{4+9+16}=\frac{4\sqrt{29}}{29}$

五角すいD－OLPQM＝$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{11\sqrt{29}}{48}\cdot\frac{4\sqrt{29}}{29}=\frac{11}{36}$

$\boxed{5}$

(1) $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{4}$ より，$\tan\theta<1$　　よって　$t<1$

$$f(t)=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\theta=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\cdot\tan\frac{\pi}{4}}-\tan\theta$$

$$=\frac{t+1}{1-t}-t=\frac{1+t^2}{1-t}$$

(2) $\theta=-\frac{\pi}{4}$ のとき　$t=-1$　よって $f(-1)=1$

$\theta=\frac{\pi}{6}$　のとき　$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

よって $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{4}{3-\sqrt{3}}=2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(3)　$f'(t)=\dfrac{2t(1-t)-(1+t^2)(-1)}{(1-t)^2}=\dfrac{-t^2+2t+1}{(1-t)^2}$

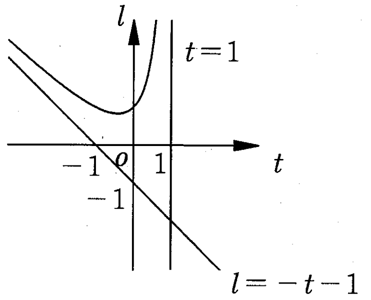
$f'(t)=0$ は　$t=1\pm\sqrt{2}$

増減表は

| $t$ | | $1-\sqrt{2}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(t)$ | ↘ | $2\sqrt{2}-2$ | ↗ | |

$l=f(t)=-t-1+\dfrac{2}{1-t}$

漸近線の式は　$t=1$，$l=-t-1$




(4) 最小値は$2\sqrt{2}-2$

このとき

$P(1, 1-\sqrt{2})$ $Q(1, \sqrt{2}-1)$

２点P，Qは　$x$ 軸対称だから　$\theta=-\dfrac{\pi}{8}$

$\boxed{6}$

(1)　$-\frac{\pi}{4}<\theta\leqq 0$ のとき，$-1<t\leqq 0$

$$f(t)=\tan(\theta+\frac{\pi}{4})-\tan\theta=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\cdot\tan\frac{\pi}{4}}-\tan\theta$$

$$=\frac{t+1}{1-t}-t=\frac{1+t^2}{1-t}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ のとき，$0<t<1$

$$f(t)=(1-\tan\theta)+(1-\tan(\frac{\pi}{4}-\theta))\quad=(1-\tan\theta)+(1-\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\theta\cdot\tan\frac{\pi}{4}})$$

$$=1-t+1-\frac{1-t}{1+t}=2-t-\frac{1-t}{1+t}\quad=\frac{-t^2+2t+1}{1+t}$$

(2)　$\theta=0$ のとき　$t=0$　よって $f(0)=1$

$\theta=\frac{\pi}{8}$　のとき，$\tan\frac{\pi}{4}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}=1$

$\tan^2\frac{\pi}{8}+2\tan\frac{\pi}{8}-1=0$　よって　$\tan\frac{\pi}{8}=-1\pm\sqrt{2}$

$\tan\frac{\pi}{8}>0$ より　$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

$$f(\sqrt{2}-1)=\frac{-(\sqrt{2}-1)^2+2(\sqrt{2}-1)+1}{1+(\sqrt{2}-1)}$$
$$=4-2\sqrt{2}$$

(3) $f'_{-}(0)=\lim_{h\to -0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\dfrac{\dfrac{1+h^2}{1-h}-1}{h}$

$=\lim_{h\to -0}\dfrac{h+1}{1-h}=1$

$f'_{+}(0)=\lim_{h\to +0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\dfrac{\dfrac{-h^2+2h+1}{1+h}-1}{h}$

$=\lim_{h\to +0}\dfrac{-h+1}{1+h}=1$

$f'_{-}(0)=f'_{+}(0)$ より $f(t)$ は $t=0$ で微分可能である。

(4) $-1<t\leqq 0$ のとき

$f'(t)=\dfrac{2t(1-t)-(1+t^2)(-1)}{(1-t)^2}=\dfrac{-t^2+2t+1}{(1-t)^2}$

$0<t<1$ のとき

$f'(t)=\dfrac{(-2t+2)(1+t)-(-t^2+2t+1)}{(1+t)^2}$

$=\dfrac{-t^2-2t+1}{(1+t)^2}$

増減表

| $t$ | $-1$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $\sqrt{2}-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | | ↘ | $2\sqrt{2}-2$ | ↗ | $1$ | ↗ | $4-2\sqrt{2}$ | ↘ | |

$\lim_{t\to -1+0} f(t)=1$

$\lim_{t\to 1-0} f(t)=1$

$t=1-\sqrt{2}$ のとき　最小値　$2\sqrt{2}-2$　$\theta=-\dfrac{\pi}{8}$

$t=\sqrt{2}-1$ のとき　最大値　$4-2\sqrt{2}$　$\theta=\dfrac{\pi}{8}$

$\boxed{7}$

（1）$x=p$ で　２つの曲線は接しているので

$f(p)=g(p)$ ，$f'(p)=g'(p)$　より

$e^p=ap^2$ ・・・・①

$e^p=2ap$ ・・・・②

①②より　　$ap^2=2ap$

よって　$a=\dfrac{e^2}{4}$　$p=2$

$l : y=e^2(x-2)+e^2=e^2(x-1)$

(2)　$h(x)=\log f(x)-\log g(x)=x-\log\dfrac{e^2}{4}x^2$

$=x-2\log x+2\log 2-2$

$h'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$

$h(x)$ の増減表は

| $x$ | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $h(x)$ | | ↘ | 0 | ↗ |

$x>0$ において　$h(x)\geqq 0$ 等号は　$x=2$ のとき

したがって　$f(x)\geqq g(x)$

$x=0$ のとき，$f(0)=1$ , $g(0)=0$ より　　$f(0)>g(0)$

$x\geqq 0$ のとき，　$f(x)\geqq g(x)$

特に等号は $x=2$ のときに限る。

⑶ 求める面積S は,

$$\mathrm{S}=\int_0^2(f(x)-g(x))dx=\int_0^2(e^x-\frac{e^2}{4}x^2)dx$$

$$=\left[e^x-\frac{e^2}{12}x^3\right]_0^2=e^2-\frac{2e^2}{3}-1=\frac{e^2}{3}-1$$

⑷ 求める体積V は

$$\mathrm{V}=\pi\int_0^{e^2}x_1{}^2\,dy-\pi\int_1^{e^2}x_2{}^2\,dy$$

$y=\frac{e^2}{4}x_1{}^2$ より　$x_1{}^2=\frac{4}{e^2}\,y$

$y=e^{x_2}$　より　　$x_2{}^2=(\log y)^2$

$$\mathrm{V}=\pi\int_0^{e^2}\frac{4y}{e^2}dy-\pi\int_1^{e^2}(\log y)^2dy=\frac{2\pi}{e^2}[y^2]_0^{e^2}-\pi\int_1^{e^2}y'(\log y)^2dy$$

$$=2\pi e^2-\pi[y(\log y)^2]_1^{e^2}+\pi\int_1^{e^2}2\log y\,dy$$

$$=2\pi e^2-\pi(4e^2-0)+2\pi\int_1^{e^2}y'(\log y)dy$$

$$=-2\pi e^2+2\pi[y(\log y)]_1^{e^2}-2\pi[y]_1^{e^2}$$

$$=-2\pi e^2+4\pi e^2-0-2\pi e^2+2\pi=2\pi$$

$\boxed{8}$

（1）$z_{n+1}=z_n$　より，　$z_n=\dfrac{z_n-2}{2z_n-1}$

$z_n{}^2-z_n+1=0$

$z_n=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$z_{n+1}=-z_n$　より，　$-z_n=\dfrac{z_n-2}{2z_n-1}$

$z_n{}^2=1$

$z_n=\pm 1$

（2）$|z_n|=1$ を証明する。

$n=1$ のとき　$|z_1|=1$ で成り立つ。

$n=k$ で，　$|z_k|=1$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ について調べると，

$$|z_{k+1}|^2=\left|\frac{z_k-2}{2z_k-1}\right|^2=\left(\frac{z_k-2}{2z_k-1}\right)\left(\overline{\frac{z_k-2}{2z_k-1}}\right)=\frac{(z_k-2)(\overline{z_k}-2)}{(2z_k-1)(2\overline{z_k}-1)}$$

$$=\frac{1+4-2(z_k+\overline{z_k})}{4-2(z_k+\overline{z_k})+1}=1$$

$|z_{k+1}|\geqq 0$ より　$|z_{k+1}|=1$ が成り立つ。

数学的帰納法よりすべての自然数$n$ について　$|z_n|=1$　が成り立つ。

(3) $z_{n+2}=\dfrac{z_{n+1}-2}{2z_{n+1}-1}=\dfrac{\dfrac{z_n-2}{2z_n-1}-2}{2\dfrac{z_n-2}{2z_n-1}-1}=\dfrac{(z_n-2)-2(2z_n-1)}{2(z_n-2)-(2z_n-1)}$

$=\dfrac{-3z_n}{-3}=z_n$

したがって、点$\mathrm{P}_{n+2}$と点$\mathrm{P}_n$は一致する。

$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2=\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\cdots\cdot$

$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=|z_2-z_1|=\left|\dfrac{z_1-2}{2z_1-1}-z_1\right|=\left|\dfrac{-2z_1{}^2+2z_1-2}{2z_1-1}\right|$(一定)

つまり，$\mathrm{P}(z_1)$が定まれば，$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$は$n$に関係なく一定である。

(4) $z_{n+1}=\mathrm{X}+\mathrm{Y}i$，$z_n=x+yi$　とする。

$\mathrm{X}+\mathrm{Y}i=\dfrac{(x+yi)-2}{2(x+yi)-1}=\dfrac{(x-2)+yi}{(2x-1)+2yi}=\dfrac{\{(x-2)+yi\}\{(2x-1)-2yi\}}{(2x-1)^2+(4y^2)}$

$=\dfrac{(2x^2+2y^2-5x+2)+(-2xyi+4yi+2xyi-yi)}{4x^2+4y^2+1-4x}$

$=\dfrac{4-5x}{5-4x}+\dfrac{3y}{5-4x}i$

$\mathrm{X}=\dfrac{4-5x}{5-4x}$　$\mathrm{Y}=\dfrac{3y}{5-4x}$

点$z_{n+1}$については，　$\mathrm{X}<0,\mathrm{Y}>0$，　$\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2=1$だから

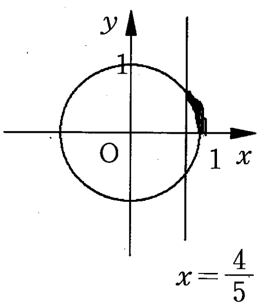
$-1\leqq x\leqq 1$より　分母$=5-4x>0$

よって$4-5x<0$，$y>0$

$x>\dfrac{4}{5}$，$y>0$，$x^2+y^2=1$

逆にこのとき，$\mathrm{X}<0,\mathrm{Y}>0,\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2=1$

したがて，求める点$\mathrm{P}_n(z_n)$の存在する範囲は下図のようになる。



$\boxed{9}$

（1）$|z_n|=1$ を証明する。

$n=1$ のとき　$|z_1|=1$ で成り立つ。

$n=k$ で，　$|z_k|=1$ が成り立つと仮定　する。

$n=k+1$ について調べると，

$$|z_{k+1}|^2=\left|\frac{z_k-2}{2z_k-1}\right|^2=\left(\frac{z_k-2}{2z_k-1}\right)\left(\overline{\frac{z_k-2}{2z_k-1}}\right)=\frac{(z_k-2)(\overline{z_k}-2)}{(2z_k-1)(2\overline{z_k}-1)}$$

$$=\frac{1+4-2(z_k+\overline{z_k})}{4-2(z_k+\overline{z_k})+1}=1$$

$|z_{k+1}|\geqq 0$ より　$|z_{k+1}|=1$ が成り立つ。

数学的帰納法よりすべての自然数$n$ について　$|z_n|=1$　が成り立つ。

（2）$$z_{n+2}=\frac{z_{n+1}-2}{2z_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{z_n-2}{2z_n-1}-2}{2\dfrac{z_n-2}{2z_n-1}-1}=\frac{(z_n-2)-2(2z_n-1)}{2(z_n-2)-(2z_n-1)}$$

$$=\frac{-3z_n}{-3}=z_n$$

したがって、点$\mathrm{P}_{n+2}$ と点$\mathrm{P}_n$ は一致する。

$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2=\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\cdots$

$$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=|z_2-z_1|=\left|\frac{z_1-2}{2z_1-1}-z_1\right|=\left|\frac{-2z_1{}^2+2z_1-2}{2z_1-1}\right|\text{（一定）}$$

つまり，$\mathrm{P}(z_1)$ が定まれば，$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ は$n$ に関係なく一定である。

（3）$z_{n+1}=\mathrm{X}+\mathrm{Y}i$ ，$z_n=x+yi$　とする。

$$\mathrm{X}+\mathrm{Y}i=\frac{(x+yi)-2}{2(x+yi)-1}=\frac{(x-2)+yi}{(2x-1)+2yi}=\frac{\{(x-2)+yi\}\{(2x-1)-2yi\}}{(2x-1)^2+(4y^2)}$$

$$=\frac{(2x^2+2y^2-5x+2)+(-2xyi+4yi+2xyi-yi)}{4x^2+4y^2+1-4x}$$

$$=\frac{4-5x}{5-4x}+\frac{3y}{5-4x}i$$

$$\mathrm{X}=\frac{4-5x}{5-4x}\quad \mathrm{Y}=\frac{3y}{5-4x}$$

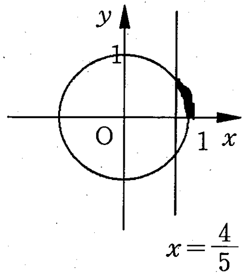
点$z_{n+1}$ については，　$\mathrm{X}<0$，$\mathrm{Y}>0$，　$\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2=1$　だから

$-1\leqq x\leqq 1$ より　分母$=5-4x>0$

よって$4-5x<0$ ，$y>0$ よって　$x>\dfrac{4}{5}$ ，$y>0$，$x^2+y^2=1$

逆にこのとき，$\mathrm{X}<0$，$\mathrm{Y}>0$，$\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2=1$

したがって，求める点$P_n(z_n)$の存在する範囲は下図のようになる。




(4)　すべての$n$に対して$\triangle OP_nP_{n+1}$が直角三角形となるためには，$\triangle OP_1P_2$が直角三角形であればよい。

$z_2 = c + di$　とする。

$0 < a < \frac{4}{5}, b > 0$　ならば　(3)より　$0 < c < \frac{4}{5}, d > 0$　となる。

$0 < \angle P_1OP_2 < \frac{\pi}{2}$　となり,$\triangle OP_1P_2$は直角三角形にならない。

したがって，$\frac{4}{5} \leqq a \leqq 1$である。つまり(3)より，$c < 0, d > 0$

$z_2 = i z_1$ ・・・①

$z_2 = \dfrac{z_1 - 2}{2z_1 - 1}$ ・・・②

①　②　より　$\dfrac{z_1 - 2}{2z_1 - 1} = i z_1$

$z_1 - 2 = i(2{z_1}^2 - z_1)$

両辺$\overline{z_1}$を乗ずると

$1 - 2\overline{z_1} = i(2z_1 - 1)$

$1 - 2(a - bi) = i(2a + 2bi - 1)$

$(1 - 2a) + 2bi = -2b + (2a - 1)i$

$a,b$は実数だから

$1 - 2a = -2b$　つまり　$b = a - \frac{1}{2}$ ・・・③

$2b = 2a - 1$　つまり　$b = a - \frac{1}{2}$ ・・・④

③と④は同値　　$a^2 + b^2 = 1$，$\frac{4}{5} \leqq a \leqq 1$より、

$$a = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}, b = \frac{\sqrt{7} - 1}{4}$$

$\boxed{10}$

(1)　（ｉ）$0 \leqq t \leqq 3\cos\theta$　のとき

$S_1(t) = \pi(t\tan\theta)^2 = \pi t^2 \tan^2\theta$

（ⅱ）$3\cos\theta \leqq t \leqq 3$　のとき

$S_1(t) = \pi(\sqrt{9-t^2})^2 = \pi(9-t^2)$

(2) $V_1 = \int_0^{3\cos\theta} S_1(t)dt + \int_{3\cos\theta}^{3} S_1(t)dt = \pi\int_0^{3\cos\theta}(t^2\tan^2\theta)dt + \pi\int_{3\cos\theta}^{3}(9-t^2)dt$

$= \pi\tan^2\theta\int_0^{3\cos\theta} t^2\,dt + \pi\int_{3\cos\theta}^{3}(9-t^2)dt = \pi\tan^2\theta\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{3\cos\theta} + \pi\left[9t - \frac{t^3}{3}\right]_{3\cos\theta}^{3}$

$= 9\pi\sin^2\theta\cos\theta + 18\pi - 27\pi\cos\theta + 9\pi\cos^3\theta$

$= 18\pi - 18\pi\cos\theta = 18\pi(1-\cos\theta)$

(3)　（ｉ）$0 \leqq t \leqq \frac{3}{2}$　のとき

$S_2(t) = \pi(\sqrt{3}\,t)^2 = 3\pi t^2$

（ⅱ）$\frac{3}{2} \leqq t \leqq 3$　のとき

$S_2(t) = \pi(9-t^2)$

(4) $V_2 = \int_0^{\frac{3}{2}} S_2(t)dt + \int_{\frac{3}{2}}^{3} S_2(t)dt = \pi\int_0^{\frac{3}{2}} 3t^2\,dt + \pi\int_{\frac{3}{2}}^{3}(9-t^2)dt$

$= \pi\left[t^3\right]_0^{\frac{3}{2}} + \pi\left[9t - \frac{t^3}{3}\right]_{\frac{3}{2}}^{3}$

$= \frac{27}{8}\pi + 27\pi - 9\pi - \frac{27}{2}\pi + \frac{9}{8}\pi = 9\pi$

（５）$V_1-V_2=18(1-\cos\theta)-9\pi=18(\frac{1}{2}-\cos\theta)$

$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ のとき　$V_1<V_2$

$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき　$V_1=V_2$

$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき　$V_1>V_2$

１１

（1）　$X_4$ の確率分布

| $X_4$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

$$E(X_4)=(-4)\cdot\frac{1}{16}+(-2)\cdot\frac{4}{16}+0\cdot\frac{6}{16}+2\cdot\frac{4}{16}+4\cdot\frac{1}{16}=0$$

$$E(X_4{}^2)=(-4)^2\cdot\frac{1}{16}+(-2)^2\cdot\frac{4}{16}+0^2\cdot\frac{6}{16}+2^2\cdot\frac{4}{16}+4^2\cdot\frac{1}{16}=\frac{64}{16}=4$$

$$V(X_4)=E(X_4{}^2)-\{E(X_4)\}^2=4-0^2=4$$

$X_5$ の確率分布

| $X_5$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $5$ | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | $\frac{1}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | 1 |

$$E(X_5)=(-5)\cdot\frac{1}{32}+(-3)\cdot\frac{5}{32}+(-1)\frac{10}{32}+1\cdot\frac{10}{32}+3\cdot\frac{5}{16}+5\cdot\frac{1}{32}=0$$

$$E(X_5{}^2)=(-5)^2\cdot\frac{1}{32}+(-3)^2\cdot\frac{5}{32}+(-1)^2\cdot\frac{10}{32}+1^2\cdot\frac{10}{32}+3^2\cdot\frac{5}{32}+5^2\cdot\frac{1}{32}=\frac{160}{32}=5$$

$$V(X_5)=E(X_5{}^2)-\{E(X_5)\}^2=5-0^2=5$$

(2) ６回目で初めて原点に戻るのは、

表⇒表⇒表⇒裏⇒裏⇒裏
表⇒表⇒裏⇒表⇒裏⇒裏
裏⇒裏⇒裏⇒表⇒表⇒表
裏⇒裏⇒表⇒裏⇒表⇒表

４通り

求める確率は，$p=\frac{1}{2}$ より

$$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$$

⑶　コインを１回投げたとき

表が出る確率は　$p$
裏が出る確率は　$1-p$

したがって，その平均は　$(+1)\cdot p+(-1)\cdot(1-p)=2p-1$

このときの
２乗平均　$(-1)^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p=1$
分散は　$1-(2p-1)^2=4p-4p^2=4p(1-p)$

確率変数は独立なので，ｎ回投げたとき

$$E(X_n)=(2p-1)+(2p-1)+\cdots+(2p-1)=n(2p-1)$$
$$V(X_n)=4p(1-p)+4p(1-p)+\cdots+4p(1-p)=4np(1-p)$$

⑷100回中　表が$x$回　，裏が$y$回　出たとする。

$x+y=100$
$(+1)\cdot x+(-1)\cdot y=28$
$x=64,\ y=36$

$p$に対する信頼度95％の信頼区間は

$$p_0-1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\leqq p\leqq p_0+1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

ここで，$n=100$，$p_0=\dfrac{x}{n}=\dfrac{64}{100}$より

$$\frac{64}{100}-1.96\sqrt{\frac{\frac{64}{100}\cdot\frac{36}{100}}{100}}\leqq p\leqq\frac{64}{100}+1.96\sqrt{\frac{\frac{64}{100}\cdot\frac{36}{100}}{100}}$$

$$0.64-1.96\cdot\frac{48}{1000}\leqq p\leqq 0.64+1.96\cdot\frac{48}{1000}$$

$$0.64-0.0941\leqq p\leqq 0.64+0.0941$$

$$0,5459\leqq p\leqq 0.7341$$