$\boxed{1}$

(1)　$x+2y\leqq 6$, $3x+y\leqq 9$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$　の連立不等式が表す領域をDとする。

領域Dは，原点$O(0,0)$，$A(3,0)$, $B(\frac{12}{5},\frac{9}{5})$, $C(0,3)$の４点を頂点とする四角形の周および内部を表す。

$2x+y=k$とおくと，$y=-2x+k$

これは，傾き-2　，ｙ切片kの直線を表す。

kの最大値は，直線が点$B(\frac{12}{5},\frac{9}{5})$を通るときである。

このとき　$k=2\cdot\frac{12}{5}+\frac{9}{5}=\frac{33}{5}$

(2)　$\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta\geqq 1$　より

$2\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})\geqq 1$

$\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})\geqq\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<\pi$より　$\frac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi$

$\frac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$

(3) $a_{n+1}=2a_n-1$ より　$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

数列$\{a_n-1\}$は初項１　,公比２の等比数列

$a_n-1=1\cdot 2^{n-1}$

$a_n=2^{n-1}+1$

$$\sum_{k=1}^{n}2ka_k=\sum_{k-1}^{n}2k(2^{k-1}+1)=\sum_{k=1}^{n}k2^k+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

ここで　$S=\sum_{k=1}^{n}k\,2^k$ とおくと

$S=\sum_{k=1}^{n}k\,2^k=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$

$2S=\qquad 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$

$S-2S=\quad 2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}$

$-S=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}-n\cdot 2^{n+1}$

$S=n\cdot 2^{n+1}-2^{n+1}+2$

$$\sum_{k=1}^{n}2ka_k=n\cdot 2^{n+1}-2^{n+1}+n^2+n+2$$

(4)円すいの半径rとすると，　母線の長さが1，高さがhの円すいだから

体積　$V(h)=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi(1-h^2)h=\dfrac{\pi}{3}(-h^3+h)$

ただし，$0<h<1$

$V'(h)=\dfrac{\pi}{3}(-3h^2+1)=-\pi\left(h+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(h-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$0<h<1$　より$V'(h)=0$　は、$h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

h	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$V'(h)$		＋	0	−	
$V(h)$		↗	$\frac{2\sqrt{3}\pi}{27}$	↘	

$h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき　，体積Vは最大値$\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{27}$

$\boxed{2}$

(1) $\overrightarrow{OP}=t\,\overrightarrow{OA}$　より　$\overrightarrow{OP}=t\,(1,2,3)=(t,2t,3t)$

$\overrightarrow{BP}=(t,2t,3t)-(1,1,-1)=(t-1,2t-1,3t+1)$
$\overrightarrow{CP}=(t,2t,3t)-(7,3,5)=(t-7,2t-3,3t-5)$

$BP^2+CP^2=\{(t-1)^2+(2t-1)^2+(3t+1)^2\}+\{(t-7)^2+(2t-3)^2+(3t-5)^2\}$

$=28t^2-56t+86$

(2)　$BP^2+CP^2=28t^2-56t+86=28(t^2-2t)+86=28(t-1)^2+58$

よって，BP^2+CP^2の最小値は５８　そのとき　P$(1,2,3)$

(3) 点H は直線OA 上にあるので

$\overrightarrow{OH}=s\,\overrightarrow{OA}=(s,2s,3s)$ とすると

$\overrightarrow{BH}=(s,2s,3s)-(1,1,-1)=(s-1,2s-1,3s+1)$

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OA}$　より　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}=s-1+2(2s-1)+3(3s+1)=0$

$14s=0$

よって　$s=0$　このとき点H は原点と一致し、H$(0,0,0)$

同様に，点K は直線OA 上にあるので　$\overrightarrow{OK}=t\,\overrightarrow{OA}$ とすると　K$(t,2t,3t)$

$\overrightarrow{CK}=(t,2t,3t)-(1,3.7)=(t-1,2t-3,3t-7)$，$\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$

$\overrightarrow{CK}\perp\overrightarrow{OA}$　より　$\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{OA}=1(t-1)+2(2t-3)+3(3t-7)=0$

$14t-28=0$

よって$t=2$　このとき　K$(2,4,6)$

$\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OB}=(1,1,-1)$

$\overrightarrow{KC}=(7,\ 3,5\ )-(2,4,6)=(5,-1,\ -1)$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{KC}}{|\overrightarrow{HB}||\overrightarrow{KC}|}=\frac{5-1+1}{\sqrt{3}\sqrt{27}}=\frac{5}{9}$$

(4)　(3)より、$\cos\theta=\frac{5}{9}$　だから、

平面OAC と平面OAB は同一平面ではない。

平面OAC を直線OA のまわりに，平面OAB と同一平面となるように$(\pi-\theta)$回転させる。点C が移動する点をC′ とするとき、２点B , C′ は直線ＡＢに対して反対側にある。

$BP+CP=BP+C'P\geqq BC'$

$BP+CP$ が最小となるのは、BC′ であり、３点B , P ,C′ が同一直線上にあるときである。

つまり$\triangle BHP\infty\triangle C'KP$

よって　$HP:PK=BH:CK=\sqrt{3}:3\sqrt{3}=1:3$ になるように点P をとる。

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OK}=(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})$　よって　$P(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})$

$BP:PC=1:3$ より、$PC=3BP$

$$BP+PC=4BP=4\sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+(1-1)^2+(\frac{3}{2}+1)^2}=4\sqrt{\frac{26}{4}}=2\sqrt{26}$$

3

(1) $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=20$

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}>0$

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$a^1+a^{-1}=(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3-3(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})$

$a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=t$　とおくと

$18=t^3-3t$

$t^3-3t-18=(t-3)(t^2+3t+6)=0$

t は実数だから　$t=3$

$a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=3$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(9x^2)\cdot\log_3\left(\frac{x}{81}\right)=-12$

真数条件より$x>0$

$\frac{\log_3 9x^2}{-1}\cdot(\log_3 x-\log_3 81)=-(\log_3 9+2\log_3 x)(\log_3 x-\log_3 81)=-12$

$\log_3 x=t$　とおく。

$-(2+2t)(t-4)=-12$

$t^2-3t-10=0$

$(t-5)(t+2)=0$

$t=5$, $t=-2$

よって

$x=3^5=243$ （真数条件を満たす）

$x=3^{-2}=\frac{1}{9}$ （真数条件を満たす）

(3) $\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta \geqq 1$　より

$2\sin(2\theta+\frac{\pi}{6}) \geqq 1$

$\sin(2\theta+\frac{\pi}{6}) \geqq \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\frac{\pi}{6} < \frac{25}{6}\pi$

よって

$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\frac{\pi}{6} \leqq \frac{5\pi}{6}$，$\frac{13\pi}{6} \leqq 2\theta+\frac{\pi}{6} \leqq \frac{17\pi}{6}$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$，$\pi \leqq \theta \leqq \frac{4\pi}{3}$

(4) $z^4 = -8-8\sqrt{3}i = 16(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) = 16(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　ただし$r>0$，$0 \leqq \theta < 2\pi$　とすると
$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$

よって$r^4=16$，$4\theta = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$　ただしnは整数

$r>0$　より　$r=2$

$\theta = \frac{\pi}{3}+\frac{n}{2}\pi$ より

$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$

よって

$z = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}) = 1+\sqrt{3}i$

$z = 2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3}+i$

$z = 2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}) = -1-\sqrt{3}i$

$z = 2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}) = \sqrt{3}-i$

$\boxed{4}$

(1) $\overrightarrow{OP}=t\,\overrightarrow{OA}$　より　$\overrightarrow{OP}=t\,(1,2,3)=(t,2t,3t)$

$\overrightarrow{BP}=(t,2t,3t)-(1,1,-1)=(t-1,2t-1,3t+1)$
$\overrightarrow{CP}=(t,2t,3t)-(7,3,5)=(t-7,2t-3,3t-5)$

$BP^2+CP^2=\{(t-1)^2+(2t-1)^2+(3t+1)^2\}+\{(t-7)^2+(2t-3)^2+(3t-5)^2\}$

$=28t^2-56t+86$

(2)　$BP^2+CP^2=28t^2-56t+86=28(t^2-2t)+86=28(t-1)^2+58$

よって，BP^2+CP^2 の最小値は５８　そのとき　$P(1,2,3)$

(3) 点H は直線OA 上にあるので

$\overrightarrow{OH}=s\,\overrightarrow{OA}=(s,2s,3s)$ とすると

$\overrightarrow{BH}=(s,2s,3s)-(1,1,-1)=(s-1,2s-1,3s+1)$

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OA}$　より　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}=s-1+2(2s-1)+3(3s+1)=0$

$14s=0$

よって　$s=0$　このとき点H は原点と一致し、$H(0,0,0)$

同様に，点K は直線OA 上にあるので　$\overrightarrow{OK}=t\,\overrightarrow{OA}$ とすると　$K(t,2t,3t)$

$\overrightarrow{CK}=(t,2t,3t)-(1,3.7)=(t-1,2t-3,3t-7)$, $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$

$\overrightarrow{CK}\perp\overrightarrow{OA}$　より　$\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{OA}=1(t-1)+2(2t-3)+3(3t-7)=0$

$14t-28=0$

よって$t=2$　このとき　$K(2,4,6)$

$\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OB}=(1,1,-1)$

$\overrightarrow{KC}=(7,\ 3,5\ )-(2,4,6)=(5,-1,\ -1)$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{KC}}{|\overrightarrow{HB}||\overrightarrow{KC}|}=\frac{5-1+1}{\sqrt{3}\sqrt{27}}=\frac{5}{9}$$

(4)　(3)より、$\cos\theta=\dfrac{5}{9}$　だから、

平面OAC と平面OAB は同一平面ではない。

平面OAC を直線OA のまわりに，平面OAB と同一平面となるように$(\pi-\theta)$ 回転させる。点C が移動する点をC′ とするとき、２点B , C′ は直線ＡＢに対して反対側にある。

BP＋CP＝BP＋C′P≧BC′

BP＋CP が最小となるのは、BC′ であり、３点B , P ,C′ が同一直線上にあるときである。

つまり△BHP∽△C′KP

よって　HP : PK＝BH : CK＝$\sqrt{3}:3\sqrt{3}=1:3$ になるように点P をとる。

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OK}=(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2})$　よって　$P(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2})$

BP : PC＝1 : 3 より、PC＝3BP

$$BP+PC=4BP=4\sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+(1-1)^2+(\frac{3}{2}+1)^2}=4\sqrt{\frac{26}{4}}=2\sqrt{26}$$

$\boxed{5}$

(1) $a_1=\int_0^1 f_1(x)\,dx \ =\int_0^1(3t^2)\,dt=[t^3]_0^1=1$

$a_2=\int_0^1 f_2(x)\,dx \ =\int_0^1(3t^2+4t)\,dt=[t^3+2t^2]_0^1=3$

(2) $f_{n+2}(x)=3x^2+4xa_{n+1}-a_n$

$a_{n+2}=\int_0^1(3t^2+4a_{n+1}t-a_n)dt=[t^3+2a_{n+1}t^2-a_nt]_0^1$

$=2a_{n+1}-a_n+1$

(3) $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+1$

$a_{n+2}-a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+1$

$b_n=a_{n+1}-a_n$　より

$b_{n+1}=b_n+1$

$b_1=a_2-a_1=3-1=2$

数列$\{b_n\}$は初項　$b_1=2$　，公差　1. の等差数列

一般項　$b_n=2+(n-1)\cdot 1=n+1$

$n\geqq 2$のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=1+\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)=\frac{n(n+1)}{2}$

これは$n=1$も成り立つ。

$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

$f_{n+2}(x)=3x^2+4\frac{(n+1)(n+2)}{2}x-\frac{n(n+1)}{2}\ (n\geqq 1)$

$f_n(x)=3x^2+2n(n-1)x-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\quad (n\geqq 3)$

これは　$n=1, n=2$も成り立つ。

$f_n(x)=3x^2+2n(n-1)x-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\ (n\geqq 1)$

(4)　$f_{n+1}(x)-f_n(x)=4nx-n+1=n(4x-1)+1$

$x=\dfrac{1}{4}$ のとき$f_{n+1}(x)-f_n(x)$ はすべての自然数n に対して１である。

したがって　$\alpha=\dfrac{1}{4}$　$\beta=1$

$y=f_n(x)$ と$y=f_{n+1}(x)$ のグラフの　交点は　$x=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4n}$

また，$\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4n}\leqq x\leqq\dfrac{1}{4}$ においては　$f_{n+1}(x)-f_n(x)=4nx-n+1\geqq 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n&=\int_{\frac{1}{4}-\frac{1}{4n}}^{\frac{1}{4}}(f_{n+1}(x)-f_n(x))dx\\
&=\int_{\frac{1}{4}-\frac{1}{4n}}^{\frac{1}{4}}(4nx-n+1)dx\\
&=\Big[2nx^2+(-n+1)x\Big]_{\frac{n-1}{4n}}^{\frac{1}{4}}\\
&=\frac{n}{8}+\frac{-n+1}{4}-\left\{2n\frac{(n-1)^2}{16n^2}+(-n+1)\frac{n-1}{4n}\right\}\\
&=\frac{-n+2}{8}-\left\{\frac{n^2-2n+1}{8n}+\frac{-n^2+2n-1}{4n}\right\}\\
&=\frac{-n^2+2n}{8n}-\frac{-n^2+2n-1}{8n}=\frac{1}{8n}
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$

(1)　$y=e^x$ より，　$y'=e^x$

点P(t , e^t) における接線 l の方程式は,

$y=e^t(x-t)+e^t=e^tx+e^t(1-t)$

$x=0$ のとき　$y=e^t(1-t)$

$y=0$ のとき　$x=t-1$

点Q(0 , $(1-t)e^t$) , R($t-1$, 0)

(2)　c を積分定数とする。

$$\int(\log x)dx=\int x'(\log x)dx=x\log x-x+c$$

$$\begin{aligned}\int(\log x)^2dx&=\int x'(\log x)^2dx=x(\log x)^2-\int 2(\log x)dx\\&=x(\log x)^2-2(x\log x-x)+c\\&=x(\log x)^2-2x\log x+2x+c\end{aligned}$$

(3) $V_1(t)$ は，底面の半径 $1-t$ ，高さ $(1-t)e^t$ の円すいの体積だから

$$V_1(t)=\frac{1}{3}\pi(1-t)^2(1-t)e^t=\frac{\pi}{3}(1-t)^3e^t$$

$V_2(t)$ は，底面の半径 t ，高さ te^t の円すいの体積から，$y=e^x$ の y 軸まわりの回転体の体積を除いたものであるから

$$V_2(t)=\frac{\pi}{3}t^3e^t-\pi\int_1^{e^t}x^2\,dy=\frac{\pi}{3}t^3e^t-\pi\int_1^{e^t}(\log y)^2\,dy$$

$$=\frac{\pi}{3}t^3e^t-\pi\Big[y(\log y)^2-2y\log y+2y\Big]_1^{e^t}$$

$$=\frac{\pi}{3}t^3e^t-\pi(t^2e^t-2te^t+2e^t-2)$$

$$=\frac{\pi}{3}(t^3-3t^2+6t-6)e^t+2\pi$$

(4) $V(t)=V_1(t)+V_2(t)=\frac{\pi}{3}(1-t)^3e^t+\frac{\pi}{3}(t^3-3t^2+6t-6)e^t+2\pi$

$$=\frac{\pi}{3}(3t-5)e^t+2\pi$$

$$V'(t)=\frac{\pi}{3}(3t-2)e^t$$

増減表

t	0		$\frac{2}{3}$		1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘	$V(\frac{2}{3})$	↗	

増減表より　V の最小値は　$(2-e^{\frac{2}{3}})\pi$

このとき　$t=\frac{2}{3}$　である。

$\boxed{7}$

（1） $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ より， $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}y'=0$

$y'=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$

P($a\cos\alpha$, $b\sin\alpha$) のとき　$y'=-\dfrac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}$

P における接線の式は， $y-b\sin\alpha=-\dfrac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}(x-a\cos\alpha)$

$(b\cos\alpha)x+(a\sin\alpha)y=ab(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$\dfrac{\cos\alpha}{a}x+\dfrac{\sin\alpha}{b}y=1$

(2) $x=0$ のとき　$y=\dfrac{b}{\sin\alpha}$

$y=0$ のとき　$x=\dfrac{a}{\cos\alpha}$

$S=\dfrac{1}{2}xy=\dfrac{ab}{2\cos\alpha\sin\alpha}=\dfrac{ab}{\sin 2\alpha}$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\sin 2\alpha\leqq 1$

$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，S は最小値 ab

このとき　Q$\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$　で　接線　$l:\ \dfrac{x}{\sqrt{2}a}+\dfrac{y}{\sqrt{2}b}=1$

(3) R($a\cos\beta$, $b\sin\beta$)　における接線 $m:\ \dfrac{\cos\beta}{a}x+\dfrac{\sin\beta}{b}y=1$

$l\perp m$　より　$\dfrac{\cos\beta}{\sqrt{2}a^2}+\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}b^2}=0$

$\tan\beta=-\dfrac{b^2}{a^2}$

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より　$\cos\beta<0$, $\sin\beta>0$

$\cos\beta=-\dfrac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$　, $\sin\beta=\dfrac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$

R$\left(-\dfrac{a^3}{\sqrt{a^4+b^4}},\ \dfrac{b^3}{\sqrt{a^4+b^4}}\right)$

(4) $Q(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ より　$OQ^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{a^2+b^2}{2}$

$R(\frac{-a^3}{\sqrt{a^4+b^4}}, \frac{b^3}{\sqrt{a^4+b^4}})$ より　$OR^2 = \frac{a^6+b^6}{a^4+b^4}$

接線　$l: \frac{x}{\sqrt{2}a} + \frac{y}{\sqrt{2}b} = 1$　より

$l: bx + ay = \sqrt{2}\,ab$

接線m : $\frac{\cos\beta}{a}x + \frac{\sin\beta}{b}y = 1$　より　$\frac{-a}{\sqrt{a^4+b^4}}x + \frac{b}{\sqrt{a^4+b^4}}y = 1$

$m: -ax + by = \sqrt{a^4+b^4}$

ここで　l , m　の式を　辺々２乗して加えると

$(a^2+b^2)x^2 + (a^2+b^2)y^2 = (a^2+b^2)^2$

$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

つまり　$OA^2 = x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

明らかに　$OA^2 > OQ^2$　だから、OA^2 とOR^2 およびOR^2 とOQ^2 の大小を調べる。

$OA^2 - OR^2 = (a^2+b^2) - \frac{a^6+b^6}{a^4+b^4} = \frac{a^2b^4+a^4b^2}{a^4+b^4} = \frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{a^4+b^4} > 0$

よって$OA^2 > OR^2$

$OR^2 - OQ^2 = \frac{a^6+b^6}{a^4+b^4} - \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a^2+b^2)(a+b)^2(a-b)^2}{2(a^4+b^4)} > 0$

$a > b > 0$ より$OR^2 > OQ^2$

$OA^2 > OR^2 > OQ^2$ より　　$OA > OR > OQ$

$\boxed{8}$

（1）　$\mathrm{I}_1=\int_1^e(\log x)dx=[x\log x]_1^e-\int_1^e dx=e-(e-1)=1$

$\mathrm{I}_2=\int_1^e(\log x)^2dx=[x(\log x)^2]_1^e-\int_1^e 2x(\log x)\frac{1}{x}dx=e-2\mathrm{I}_1=e-2$

$\mathrm{I}_{n+1}=\int_1^e(\log x)^{n+1}dx=[x(\log x)^{n+1}]_1^e-\int_1^n x(n+1)(\log x)^n\frac{1}{x}dx$

$=e-(n+1)\mathrm{I}_n$

(2)　$a+be=0$

$a=0$ かつ$b=0$ でないとすると，

（ⅰ）$a\fallingdotseq 0, b=0$　　（ⅱ）$a=0, b\fallingdotseq 0$　　（ⅲ）$a\fallingdotseq 0, b\fallingdotseq 0$

仮に　（ⅰ）のときは、$a=0$ となり不合理。

仮に　（ⅱ),(ⅲ）の　$b\fallingdotseq 0$　であれば　$e=-\frac{a}{b}$

e は無理数だから左辺は無理数，　a,b は有理数だから右辺は有理数。

同時に成り立たないので，不合理が生じる。

したがって　$b=0$

よって　$a=0$　かつ　$b=0$（証明終わり）

(3)　$n=1$ のとき

$\mathrm{I}_1=1=\mathrm{A}_1+\mathrm{B}_1e$

$\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1$ が有理数であれば　（1）(2)より$\mathrm{A}_1=1, \mathrm{B}_1=0$　として表せる。

$n=k$ のとき

$\mathrm{I}_k=\mathrm{A}_k+\mathrm{B}_k e$　（$\mathrm{A}_k, \mathrm{B}_k$ は有理数）として表せると仮定する。

$n=k+1$ のとき

(1)(2)より

$\mathrm{I}_{k+1}=e-(k+1)\mathrm{I}_k=e-(k+1)(\mathrm{A}_k+\mathrm{B}_k e)$

$=-(k+1)\mathrm{A}_k+\{1-(k+1)\mathrm{B}_k\}e$

$\mathrm{A}_{k+1}=-(k+1)\mathrm{A}_k$，$\mathrm{B}_{k+1}=1-(k+1)\mathrm{B}_k$

とおくと，$\mathrm{I}_{k+1}=\mathrm{A}_{k+1}+\mathrm{B}_{k+1}e$

$\mathrm{A}_k, \mathrm{B}_k$ は有理数より、$\mathrm{A}_{k+1}, \mathrm{B}_{k+1}$ は有理数　として表せる

よって　$n=k+1$ のときも成り立つ。

すべての自然数n に対して　$\mathrm{I}_n=\mathrm{A}_n+\mathrm{B}_n e$　$\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n$ は有理数　として表せる

(4)　$C_n=\dfrac{A_n}{(-1)^{n+1}n!}$ より　$A_n=(-1)^{n+1}n!\,C_n$

$A_{n+1}+(n+1)A_n=0$　より

$(-1)^{n+2}(n+1)!\,C_{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)!\,C_n=0$

$C_{n+1}=C_n$

$C_1=A_1=1$

数列$\{C_n\}$は定数列だから　$C_n=1$

$A_n=(-1)^{n+1}n!$

(5)　$B_n=1+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i{}_nP_i=1-{}_nP_1+{}_nP_2-{}_nP_3+\cdots\cdot+(-1)^n{}_nP_n$

$n=1$のとき　$B_1=1-{}_1P_1=1-1=0$　（成り立つ）

$n=k$のとき　$B_k=1-{}_kP_1+{}_kP_2-{}_kP_3+\cdots\cdot+(-1)^k{}_kP_k$

成り立つと仮定する。

$n=k+1$について

$$\begin{aligned}B_{k+1}&=1-(k+1)B_k\\&=1-(k+1)\{1-{}_kP_1+{}_kP_2-{}_kP_3+\cdots+(-1)^k{}_kP_k\}\\&=1-(k+1)+(k+1){}_kP_1-(k+1){}_kP_2+(k+1){}_kP_3-\cdots+(-1)^{k+1}(k+1){}_kP_k\end{aligned}$$

ここで

$$(k+1){}_kP_i=(k+1)\cdot\frac{k!}{(k-i)!}=\frac{(k+1)!}{\{(k+1)-(i+1)\}!}={}_{k+1}P_{i+1}$$

よって

$$\begin{aligned}B_{k+1}&=1-{}_{k+1}P_1+{}_{k+1}P_2-{}_{k+1}P_3+\cdots+(-1)^{k+1}{}_{k+1}P_k\\&=1-{}_{k+1}P_1+{}_{k+1}P_2-{}_{k+1}P_3+\cdots+(-1)^{k+1}{}_{k+1}P_{k+1}\\&=1+\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i{}_{k+1}P_i\end{aligned}$$

したがって　$n=k+1$についても成り立つ。

すべての自然数nについて$B_n=1+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i{}_nP_i$（証明終わり）

$I_5=A_5+B_5e=(-1)^6\cdot5!+(1-{}_5P_1+{}_5P_2-{}_5P_3+{}_5P_4-{}_5P_5)e$

$I_5=120-44e$

$\boxed{9}$

(1)　$y=e^x$ より，　$y'=e^x$

点P(t, e^t)における接線 l の方程式は，

$y=e^t(x-t)+e^t=e^t x+e^t(1-t)$

$x=0$ のとき　　$y=e^t(1-t)$

$y=0$ のとき　　$x=t-1$

点Q$(0, (1-t)e^t)$，R$(t-1, 0)$

(2)　c を積分定数とする。

$$\int(\log x)dx=\int x'(\log x)\,dx=x\log x-x+c$$

$$\begin{aligned}\int(\log x)^2\,dx=\int x'(\log x)^2\,dx&=x(\log x)^2-\int 2(\log x)dx\\&=x(\log x)^2-2(x\log x-x)+c\\&=x(\log x)^2-2x\log x+2x+c\end{aligned}$$

(3) $V_1(t)$ は，底面の半径$1-t$　，高さ$(1-t)e^t$ の円すいの体積だから

$$V_1(t)=\frac{1}{3}\pi(1-t)^2(1-t)e^t=\frac{\pi}{3}(1-t)^3e^t$$

$V_2(t)$ は，底面の半径t　，高さte^t の円すいの体積から，$y=e^x$ の y 軸まわりの回転体の体積を除いたものであるから

$$V_2(t)=\frac{\pi}{3}t^3e^t-\pi\int_1^{e^t}x^2\,dy=\frac{\pi}{3}t^3e^t-\pi\int_1^{e^t}(\log y)^2\,dy$$

$$=\frac{\pi}{3}t^3e^t-\pi\Big[y(\log y)^2-2y\log y+2y\Big]_1^{e^t}$$

$$=\frac{\pi}{3}t^3e^t-\pi(t^2e^t-2te^t+2e^t-2)$$

$$=\frac{\pi}{3}(t^3-3t^2+6t-6)e^t+2\pi$$

(4) $V(t)=V_1(t)+V_2(t)=\frac{\pi}{3}(1-t)^3e^t+\frac{\pi}{3}(t^3-3t^2+6t-6)e^t+2\pi$

$$=\frac{\pi}{3}(3t-5)e^t+2\pi$$

$$V'(t)=\frac{\pi}{3}(3t-2)e^t$$

増減表

t	0		$\frac{2}{3}$		1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘	$V(\frac{2}{3})$	↗	

増減表より　V の最小値は　$(2-e^{\frac{2}{3}})\pi$

このとき　$t=\frac{2}{3}$　である。

$\boxed{10}$

(1) $X_1=1$ について

初めにPは1にあるので、$X_1=1$ となる確率は，Pが動かないことである。
したがって，裏が出ればよいので　$q_1=1-p$

$X_2=1$ について

$X_1=1$　の場合は　$q_1\cdot(1-p)=(1-p)^2$

$X_1=-1$ の場合は，　$(1-q_1)p=p^2$

両者は互いに排反なので　$q_2=p^2+(1-p)^2=2p^2-2p+1$

$X_3=1$ について

$X_2=1$　の場合は　$q_2\cdot(1-p)=(2p^2-2p+1)(1-p)=-2p^3+4p^2-3p+1$

$X_2=-1$ の場合は，　$(1-q_2)p=(-2p^2+2p)p=-2p^3+2p^2$

両者は互いに排反なので　$q_3=-4p^3+6p^2-3p+1$

(2)

$X_{n+1}=1$ のときは　$X_n=1$ と　$X_n=-1$　の２通りが考えられるので

$q_{n+1}=(1-p)q_n+p(1-q_n)=(1-2p)q_n+p$

(3)

$q_{n+1}=(1-2p)q_n+p$　について、等式を数列として扱い

$q_{n+1}-\alpha=(1-2p)(q_n-\alpha)$ と変形する。

α は、特性方程式　$\alpha=(1-2p)\alpha+p$ の解であり　$\alpha=\dfrac{1}{2}$

数列 $\{q_n-\dfrac{1}{2}\}$ は初項　$q_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-p$　，公比 $(1-2p)$ の等比数列

$$q_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}-p\right)(1-2p)^{n-1}=\frac{(1-2p)^n}{2}$$

$$q_n=\frac{1}{2}(1-2p)^n+\frac{1}{2}=\frac{(1-2p)^n+1}{2}$$

(4)

平均

$$E(X_n)=1\cdot q_n+(-1)\cdot(1-q_n)=2q_n-1=(1-2p)^n$$

分散

$$\begin{aligned}V(X_n)&=E(X_n{}^2)-\{E(X_n)\}^2\\&=1^2\cdot q_n+(-1)^2(1-q_n)-\{(1-2p)^n\}^2\\&=1-(1-2p)^{2n}\end{aligned}$$

標準偏差

$$\begin{aligned}\sigma(X_n)&=\sqrt{V(X_n)}\\&=\sqrt{1-(1-2p)^{2n}}\end{aligned}$$