高度な記述問題（数学）【サンプル問題（出題意図、解答・解説）】

【出題意図】

$\boxed{1}$　数学Ａの単元「場合の数と確率」における場合の数の分野からの出題である。

横一列に並ぶマス目に、ある規則をもって碁石を並べ、その並べ方の通りを問う問題である。

易しい並べ方の例から規則性を見出し一般化させるとともに、その結果と組み合わせの数との関連を考察させ、問題解決の過程を振り返って考察を深め、数学的に判断し、表現する力を問う。

$\boxed{2}$　数学Ⅰの単元「２次関数」の分野からの出題である。

正方形に内接する正三角形の面積の最大値を問う問題である。正三角形の１つの頂点が特定の位置にある場合の残りの２つの頂点の位置を調べさせるとともに、一般的な位置での面積の最大値を２次関数のグラフを利用して求めさせる。その際、頂点の位置は図形の対称性等を利用すれば簡略化して答えることができる理由を述べさせ、事象を論理的に考察する力、事象の本質を認識し、統合的・発展的に思考する力を問う。

$\boxed{3}$　数学Ⅲの単元「微分法」「積分法」の分野からの出題である。

Ｌ字型に繋がる幅の異なる廊下を水平に運ぶことが可能な棒の長さの最大値を座標平面で表現して考察させるとともに、それに関連する微分積分の基本的理解を問う総合問題である。

座標平面上の定点を通る直線が両座標軸で切り取られる線分の長さが最小になる場合が、棒が廊下を通り抜ける最大の長さになる理由を述べさせ、得られた結果を意味づけたり、活用したりする柔軟な思考力と表現力を問う。

また、これに関連して媒介変数表示されたアステロイド曲線における接線の式や接線と曲線が囲まれる面積など微分積分の総合的な理解力を問う。

今回、作題にあたっては、出来るだけ日常の生活の事象に近い内容に心がけた。

単に結果を求めるだけではなく、その問題解決の過程に力点を置き、何故、成り立つのかその理由を述べさせ、事象を数学的に捉え、数学的に処理し、問題を解決するための柔軟な思考力や表現力等を問う問題とした。

$\boxed{1}$【解答･解説】

(1) 題意をみたすのは，（1，4，7），（1，4，8），（1，5，8），（2，5，8）

(2)(i) 一番左の碁石が 1 にあるときを考えると

（1，4，7），（1，4，8），……，（1，4，12）が 6 通り

（1，5，8），（1，5，9），……，（1，5，12）が 5 通り

…… ……

（1，9，12）が 1 通り。

したがって，一番左の碁石が 1 にあるときは，$6+5+4+3+2+1=21$ 通りある。

同様に，一番左の碁石が 2 にあるときは，$5+4+3+2+1=15$ 通り

(ii) (i)と同様に一番左の碁石が 3 にあるときは，$4+3+2+1=10$ 通り

4 にあるときは，$3+2+1=6$ 通り

5 にあるときは，$2+1=3$ 通り

6 にあるときは，$1=1$ 通り　である。

したがって，全部で　$21+15+10+6+3+1=56$ 通りある。

別解① 条件にあう 3 数を（i，j，m）（ただし，$i<j<m$）とすると，$1 \leqq i \leqq 6$ であり，この中で i を固定して考えると，

j の選び方は $j=i+3, i+4, \cdots, 9$ の $9-(i+2)=7-i$ 通り，

m の選び方は $m=j+3, j+4, \cdots, 12$ の $12-(j+2)=10-j$ 通りとなる。

したがって求める場合の数は

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=i+3}^{9}(10-j)=\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{1}{2}\{9-(i+2)\}\{10-(i+3)+1\}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}(7-i)(8-i)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}(i^2-15i+56)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13-\frac{15}{2}\cdot 6\cdot 7+56\cdot 6\right)=56$$

別解② 条件にあう 3 数（i，j，m）（ただし，$i<j<m$）と 3 数（i，$j-2$，$m-4$）の組は 1 対 1 に対応する。よって，3 数（i，$j-2$，$m-4$）の組の選び方は，

1，2，3，…，8 から異なる 3 数を選ぶ選び方と同じなので，${}_8C_3=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$ 通り。

(3) (i) 一番左の碁石が 1 にあるとき

（1，4，7），（1，4，8），……，（1，4，n）が $n-6$ 通り

（1，5，8），（1，5，9），……，（1，5，n）が $n-7$ 通り

…… ……

（1，$n-3$，n）が 1 通り

したがって，一番左の碁石が 1 にあるときは，$(n-6)+(n-7)+\cdots+3+2+1=\dfrac{1}{2}(n-6)(n-5)$

通りある。

(ii)　(i)と同様にすると，

一番左の碁石が 2 にあるときは，$(n-7)+(n-8)+\cdots+3+2+1=\dfrac{1}{2}(n-7)(n-6)$ 通り，

3 にあるときは，$(n-8)+(n-9)+\cdots+3+2+1=\dfrac{1}{2}(n-8)(n-9)$ 通り

あるので，一番左の碁石が k にあるときは，

$\dfrac{1}{2}(n-5-k)(n-4-k)$ 通りある。$\left(=\dfrac{1}{2}\{k^2-(2n-9)k+(n-4)(n-5)\}\right)$

$\boxed{\text{別解}}$　一番左の碁石が k（ただし，$1\leqq k\leqq n-6$ ）にあるとき，

$(k, k+3, k+6)$,$(k, k+3, k+7)$，$\cdots\cdots(k, k+3, n)$が $n-(k+5)=n-k-5$ 通り

$(k, k+4, k+7)$,$(k, k+4, k+8)$，$\cdots\cdots(k, k+4, n)$が $n-(k+6)=n-k-6$ 通り

$\cdots\cdots$　　　　$\cdots\cdots$

$(k, n-3, n)$が 1 通り

したがって，

$(n-k-5)+(n-k-6)+\cdots+3+2+1=\dfrac{1}{2}(n-k-5)(n-k-4)$ 通りある。

$\left(=\dfrac{1}{2}\{k^2-(2n-9)k+(n-4)(n-5)\}\right)$

(iii)　(ii) より，求める場合の数は

$$\sum_{k=1}^{n-6}\frac{1}{2}(n-5-k)(n-4-k)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-6}\{k^2-(2n-9)k+(n-4)(n-5)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}(n-6)(n-5)(2n-11)-\frac{1}{2}(2n-9)(n-6)(n-5)+(n-4)(n-5)(n-6)\right\}$$

$$=\frac{1}{12}(n-6)(n-5)\{(2n-11)-3(2n-9)+6(n-4)\}$$

$$=\frac{1}{12}(n-6)(n-5)(2n-8)$$

$$=\frac{1}{6}(n-4)(n-5)(n-6)\quad\text{通り}$$

$\boxed{\text{別解}}$　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-6}\frac{1}{2}(n-5-k)(n-4-k)$

$$=\sum_{j=1}^{n-6}\frac{1}{2}j(j+1)\quad(j=n-5-k\text{ と置き換える})$$

$$=\sum_{j=1}^{n-6}\frac{1}{2}j(j+1)\frac{1}{3}\{(j+2)-(j-1)\}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n-6}\{j(j+1)(j+2)-(j-1)j(j+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n-6}\{f(j)-f(j-1)\}\quad(f(j)=j(j+1)(j+2)\text{ とおく})$$

$$=\frac{1}{6}\{f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+\cdots+f(n-6)-f(n-7)\}$$

$$=\frac{1}{6}\{f(n-6)-f(0)\}$$

$$=\frac{1}{6}(n-6)(n-5)(n-4)\quad\text{通り}$$

(4) $\dfrac{(n-4)(n-5)(n-6)}{6}=\dfrac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3\cdot2\cdot1}={}_{n-4}C_3$　より，

アは $n-4$，イは 3

${}_{n-4}C_3$ で求まる理由：条件にあう 3 数 (i, j, m) (ただし，$i<j<m$) と 3 数 (i, $j-2$, $m-4$) の組は 1 対 1 に対応する。したがって，3 数 (i, $j-2$, $m-4$) の組の選び方は，1，2，3，…，$n-4$ から異なる 3 数を選ぶ選び方と同じになるから ${}_{n-4}C_3$ で求まる。

別解① $\boxed{\bigcirc}$，$\boxed{}\boxed{\bigcirc}\boxed{}$，$\boxed{\bigcirc}$ を次の ∨ から 3 ヶ所選び，左から順に入れればよい。

$\vee\boxed{}\vee\boxed{}\vee\boxed{}\vee\boxed{}\vee\ ,\cdots,\ \vee\boxed{}\vee\boxed{}\vee\boxed{}\vee$

∨ は，$(n-5)+1=n-4$ 個あるので，${}_{n-4}C_3$ で求まる。

別解② A，B，C のブロックをそれぞれ次のように考える。

A：$\boxed{\bigcirc}\boxed{}$，B：$\boxed{}\boxed{\bigcirc}\boxed{}$，C：$\boxed{}\boxed{\bigcirc}$ として 1 つにまとめる。

n 個の $\boxed{}$ から，7 個の $\boxed{}$ を取り除いて，$\boxed{}$ が $n-7$ 個残る。

A，B，C が，左からこの順に並ぶように $n-7$ 個の $\boxed{}$ と合わせて横一列に並べればよいので

$$\frac{\{(n-7)+3\}!}{(n-7)!\,3!}=\frac{(n-4)!}{(n-7)!\,3!}=\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!}={}_{n-4}C_3\quad 通り$$

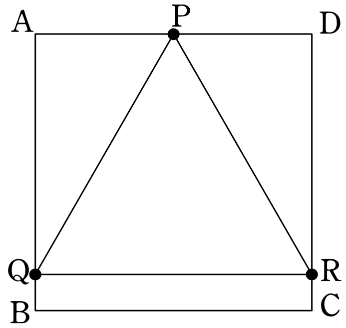
※ A，B，C のブロックは，A：$\boxed{\bigcirc}$，B：$\boxed{}\boxed{}\boxed{\bigcirc}\boxed{}\boxed{}$，C：$\boxed{\bigcirc}$ 等でもよい。

$\boxed{2}$ 【解答･解説】

(1)　点 P が辺 AD の中点 M にあるので，　$t=\dfrac{1}{2}$

△APQ は，30°，60°，90° の直角三角形だから，

$a=1$，　$S=\dfrac{1}{2}a^2\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$



(2)　点 P が点 D の位置にあるので，　$t=1$

$AQ=\sqrt{a^2-1}$，BQ$=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

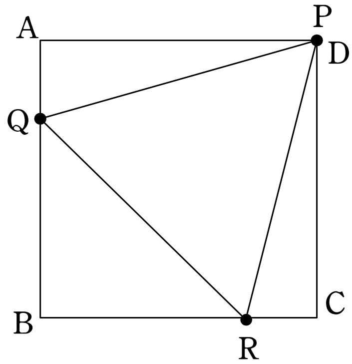
AB=AQ+BQ より，　$\sqrt{a^2-1}+\dfrac{a}{\sqrt{2}}=1$

$\sqrt{a^2-1}=1-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ を両辺平方して整理すると，

$a^2+2\sqrt{2}a-4=0$

これを解くと，　$a>0$ より，　$a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

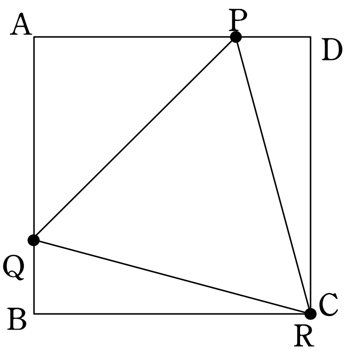
このとき，$S=\dfrac{1}{2}a^2\sin 60°=2\sqrt{3}-3$



別解　∠APQ= 15° であるので，　$a=\dfrac{1}{\cos 15°}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

(3)　点 R が点 C の位置にあるので，正三角形の頂点の 1 つが，
正方形の頂点と重なる状況は，(2)と同様に扱うことができる。
したがって，　$a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

$t=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}-1$　　よって，　$l=\sqrt{3}-1$



別解　∠DCP= 15° であるので，　PD$=\tan 15°=\dfrac{\tan 60°-\tan 45°}{1+\tan 60°\tan 45°}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$

よって，　$l=1-\mathrm{PD}=\sqrt{3}-1$

(4)　DR=AQ+QH より，

$\sqrt{a^2-(1-t)^2}=\sqrt{a^2-t^2}+\sqrt{a^2-1}$

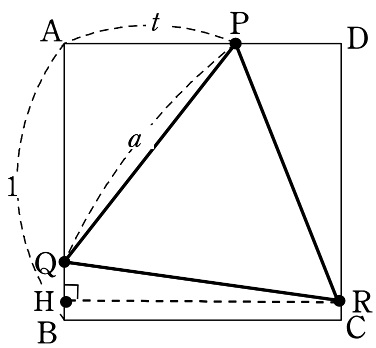
両辺平方して，整理すると，

$a^2-(1-t)^2=a^2-t^2+a^2-1+2\sqrt{(a^2-t^2)(a^2-1)}$

$2t-a^2=2\sqrt{(a^2-t^2)(a^2-1)}$

$3a^4=4(a^2t^2-a^2t+a^2)$

よって，　$a^2=\dfrac{4}{3}(t^2-t+1)$



このとき，$S=\dfrac{1}{2}a^2\sin 60°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(t^2-t+1)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq \sqrt{3}-1$ より，最大値 $2\sqrt{3}-3$ ($t=\sqrt{3}-1$ のとき)

最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(t=\dfrac{1}{2}\text{のとき}\right)$

$\boxed{\text{別解}}$① DR＝AQ＋QHを用いなくても，AP＋PD＝1を用いて，次のように解くことができる。

$\angle$APQ＝θとすると， $\cos\theta=\dfrac{t}{a}$

AP＋PD＝1より， $a\cos\theta+a\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi-\theta\right)=1$

よって，$\dfrac{1}{2}a(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)=1$

$\cos\theta=\dfrac{t}{a}$ ， $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{t}{a}\right)^2}$ を代入して整理すると， $a^2=\dfrac{4}{3}(t^2-t+1)$

$\boxed{\text{別解}}$② 数学Ⅲで学ぶ「複素数平面」を用いると次のように解くこともできる。

Aを原点とする複素数平面上で，

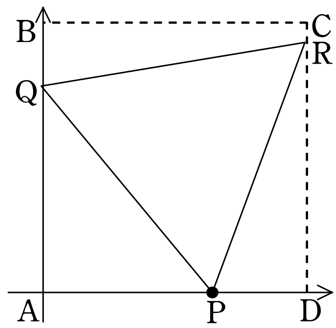
P(t) とおくと，Q $\left(\sqrt{a^2-t^2}\,i\right)$

Pを中心にQを $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転させた点が R なので，

Rは， $\left(-t+\sqrt{a^2-t^2}\,i\right)\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}+t$

この実部が 1 であればよいので，

$\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2-t^2}=1$ よって， $a^2=\dfrac{4}{3}(t^2-t+1)$



(5) $0 \leqq t \leqq 1$ において，ADの中点Mを通りABに平行な直線に関して図形が左右対称なので，

右半分 すなわち $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$…① を調べればよい。

また， $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq l$ 以外の $l \leqq t \leqq 1$ については，Q が 線分 Q_1Q_2 上にある。

すなわち， $2-\sqrt{3} \leqq$ BQ $\leqq \sqrt{3}-1$ である。

これは，AP に置き換えても同じことがいえるので， $2-\sqrt{3} \leqq t \leqq \sqrt{3}-1$…②

よって，①,②より， $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq \sqrt{3}-1$ を調べれば十分である。

$\boxed{3}$ **【解答･解説】**

[I](1)　直線 l は，$y=-m(x-a)+b$ である。

また，$x=0$ とすると，$y=ma+b$ ，$y=0$ とすると，$x=\dfrac{ma+b}{m}$ が得られる。

したがって，点 R の座標は $(0\,,\,ma+b)$ ，点 Q の座標は $\left(\dfrac{ma+b}{m}\,,\,0\right)$ となる。また，

$$f(m)=(ma+b)^2+\left(\frac{ma+b}{m}\right)^2=(ma+b)^2\left(1+\frac{1}{m^2}\right)$$

今，$f(m)$ を m について微分すると，

$$\begin{aligned} f'(m)&=2(ma+b)a\left(1+\frac{1}{m^2}\right)+(ma+b)^2\left(-\frac{2}{m^3}\right)\\ &=2(ma+b)\left(a+\frac{a}{m^2}-\frac{ma+b}{m^3}\right)\\ &=2(ma+b)\left(\frac{m^3a-b}{m^3}\right)\end{aligned}$$

となり，したがって，$m>0$ ，$a>0$ ，$b>0$ より，$f'(m)=0$ となる m は，$m=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$

m	0	$\cdots$	$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\cdots$
$f'(m)$		$-$	0	$+$
$f(m)$		↘	極小	↗

増減表より，$m=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ のとき，$f(m)$ は最小となる。

$$f\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}a+b\right\}^2\left\{1+\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}\right\}$$

$$=\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b\right)^2\left\{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}$$

$$=b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^2b^{-\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

したがって，$f(m)$ の最小値は，$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$ である。

また，点P$(a\,,\,b)$ を通り，$f(m)$ が最小となる直線 L_1 は，$y=-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}(x-a)+b$

(2)　棒が，(1) で求めた線分 QR の最小値 $\sqrt{f(m)}$ より長い場合は，廊下A から廊下B へ通すことはできない。また，$\sqrt{f(m)}$ より短くなれば，通り抜けることができる。よって，棒の長さの最大値は，

$$\sqrt{f(m)}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

[II](1) $\dfrac{dx}{d\theta}=-3\cos^2\theta\sin\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{-3\cos^2\theta\sin\theta}=-\tan\theta$$

となる。したがって，$a=\cos^3\theta$，$b=\sin^3\theta$ より， $\tan\theta=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ となることから，関数

$g(x)$ の点Pにおける接線の傾きは， $-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ となり，直線 L_2 は $y=-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}(x-a)+b$ で

ある。したがって，関数 $g(x)$ の点 P における接線 L_2 は，(1) で求めた直線 L_1 と一致する。

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\tan\theta$ より，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\frac{1}{\cos^2\theta}}{-3\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{3\cos^4\theta\sin\theta}$$

となる。$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ であるので，$\dfrac{dy}{dx}<0$ かつ $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ となる。

よって，関数 $g(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$において,単調減少であり，そのグラフは下に凸である。

(3) [II](1) より，直線 L_1 は $g(x)$ の点 P における接線であり，

[II](2) より，点 P における接線は $g(x)$ より下側にあることがわかる。

したがって，直線 L_1 と関数 $g(x)$ ，x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積 S は，曲線 C と x 軸，

y 軸で囲まれた図形の面積 S_1 から，直線 L_1 と x 軸，y 軸とで囲まれた図形の面積 S_2 をひけ

ばよい。まず， S_1 は， $\dfrac{dx}{d\theta}=-3\cos^2\theta\sin\theta$ ，$\dfrac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta$ より

$$\begin{aligned}
S_1&=\int_0^1 y\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cdot 3\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3(\sin\theta\cos\theta)^2\sin^2\theta\,d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{4}\sin^2 2\theta\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{16}(\cos3\theta-\cos\theta)^2d\theta\\
&=\frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 3\theta-2\cos3\theta\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta\\
&=\frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1+\cos6\theta}{2}-(\cos4\theta+\cos2\theta)+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right\}d\theta\\
&=\frac{3}{16}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin6\theta}{12}-\left(\frac{1}{4}\sin4\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)+\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{32}\pi
\end{aligned}$$

次に，S_2 を求める。(2)より，直線 L_1 は $y=-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}(x-a)+b$ であり，

$a=\cos^3\theta$，$b=\sin^3\theta$ を代入すると，$y=-\tan\theta(x-\cos^3\theta)+\sin^3\theta$ となる。

したがって，直線 L_1 の x 軸との交点の座標は，$(\cos\theta, 0)$，y 軸との交点の座標は $(0, \sin\theta)$ となり，S_2 は，

$$S_2=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

である。よって，S は，

$$S=S_1-S_2=\frac{3}{32}\pi-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

となる。

別解　S_1 はWallis(ウォリス)の公式を用いると，次のように計算できる。

【Wallisの公式】 整数nにおいて，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ $(n\geqq 0)$ とすると，$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n\geqq 2)$

証明　$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx=\Big[\sin^{n-1}x(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

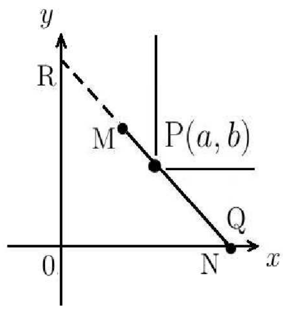
$$S_1=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x(1-\sin^2 x)\,dx=3(I_4-I_6)=3\left(I_4-\frac{5}{6}I_4\right)$$

$$=\frac{1}{2}I_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{32}\pi$$

【［Ⅰ］(2) に関する詳細な解説】

図2 において，長さ l の線分 MN を考える。

以下，$f(m)$ は，(1) で得られた線分 QR の最小値 $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$ とする。



(i) $l\leqq\sqrt{f(m)}$ の場合

線分 MN を，N＝Q となるように，線分 QR に重ねたとき，次の 3 つの状況が考えられる。以下，L を線分 QR 上の点 Q と点 P との距離とする。

(a) $l<L$　　(b) $l>L$　　(c) $l=L$

(a) の場合，点Mから x 軸に下した垂線の長さは b 未満となるので，棒を廊下B へ運ぶことができる。

(b) の場合，点 N を中心に，x 軸に向かって回転させる。このとき，点 M が移動した点を M’ とすると，点 M’ が x 軸上にある場合，そのまま棒を廊下 B へ運ぶことができる。点 M’ が y 軸上にある場合，点 M’ と原点との距離が b 未満となれば，(a) の場合と同様に，棒を廊下 B へ運ぶことができる。点 M’ と原点との距離が，b より大きい場合は，x 軸に沿って，点P に接するまで平行移動し，再び，x 軸に向かって回転させる。このようにすることで，点 M’ と原点との距離を b 以下にすることができ，廊下 A から廊下 B へ棒を運ぶことができる。

(c) の場合，線分 QR に重なるため，(a) や(b) の場合のように，平行移動や回転移動をすることは

できない。しかしながら，棒と廊下の摩擦がないため，点 R を y 軸に沿って，線分 QR の距離 $\sqrt{f(m)}$ を保ちながら，点 Q を x 軸に沿って動かすことで，廊下 A から廊下 B へ棒を運ぶことができる。

(ii) $l>\sqrt{f(m)}$ の場合

この場合， $l>\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}>a$ より，棒は y 軸と平行に運ぶことしかできない。このとき， $l>\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}>b$ 　より，平行移動や回転移動をすると，y 軸や $x=a$ と接するため，廊下A の壁にぶつかることになる。また，この棒を，線分 QR に重ねると，線分 QR より長いので，点 Q 及び点 R を超えることになる。したがって，廊下 A から廊下 B へ棒を運ぶことはできない。

$\boxed{\text{別解}}$ M＝Qとなるように線分MNを置く。このとき，直線MNは，

$$\frac{x}{\sqrt{l^2-(ma+b)^2}}+\frac{y}{ma+b}=1$$

と表すことができる。したがって， $y=-\frac{ma+b}{\sqrt{l^2-(ma+b)^2}}x+ma+b$ より，

$$-mx+ma+b-\left(-\frac{ma+b}{\sqrt{l^2-(ma+b)^2}}x+ma+b\right)$$

$$=\frac{x}{\sqrt{l^2-(ma+b)^2}}\left(-m\sqrt{l^2-(ma+b)^2}+ma+b\right)$$

$$<\frac{x}{\sqrt{l^2-(ma+b)^2}}\left(-m\sqrt{f(m)-(ma+b)^2}+ma+b\right)$$

$$<\frac{x}{\sqrt{l^2-(ma+b)^2}}\left(-m\sqrt{\left(\frac{ma+b}{m}\right)^2}+ma+b\right)=0$$

このことから， $y=-\frac{ma+b}{\sqrt{l^2-(ma+b)^2}}x+ma+b$ は， $y=-mx+ma+b$ よりも上側になるため，廊下 A から廊下 B へ運ぶことはできない。

以上のことから，$l\leqq\sqrt{f(m)}$ となる長さ l の棒を運ぶことはできるが， $l>\sqrt{f(m)}$ となる長さ l の棒を運ぶことはできないので，この廊下を運ぶことのできる棒の最大の長さは，(3)より

$\sqrt{f(m)}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ となる。