平成29年度 入学試験問題

数学

注意事項

試験開始後，問題冊子及び解答用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 各志願者は，下の表 (1) に指示した問題を解答すること。ただし，教育学部については志望するコース（専攻）により，下の表 (2) のように分類する。
3. 解答は，必ず問題と同じ番号の解答用紙のおもて面に記入すること。
4. 解答は明瞭に書くこと。
5. 解答用紙は持ち出さないこと。

表 (1)

志望学部	問題の番号
教育学部A 経済学部 環境科学部 水産学部	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
教育学部B 薬学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$
医学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
歯学部 工学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

表 (2)

分類	志望するコース（専攻）
教育学部A	小学校教育コース 幼稚園教育コース（こども保育専攻） 特別支援教育コース 中学校教育コース（社会専攻，技術専攻）
教育学部B	中学校教育コース（数学専攻）

1 以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle$OAB において，辺 OA を $1:2$ に内分する点を M とし，辺 OB を $3:2$ に内分する点を N とする。また，線分 AN と線分 BM の交点を P とし，直線 OP と辺 AB の交点を Q とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OP}$ および $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 連立不等式

$$x+y \leqq 4, \quad y \leqq 2x+4, \quad y \geqq 0$$

の表す領域と放物線 $y=x^2-6x+k$ が共有点をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

(3) $a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=1$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ および数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\sin^4\theta+\cos^4\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ。

（下書き用紙）

$\boxed{2}$ 2つの放物線 $C_1 : y = 2x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2mx + 1$ について考える。ただし，m を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

(1) A，B を C_1 上の2点とし，その x 座標をそれぞれ α，β とする。ただし，$\alpha < \beta$ である。このとき，直線 AB の傾きおよび y 切片を，α と β で表せ。

(2) C_1 と C_2 は異なる2点で交わることを示せ。(1) の2点 A，B が C_1 と C_2 の交点であるとき，2次方程式の解と係数の関係を利用して，$\alpha + \beta$，$\alpha\beta$ を求めよ。さらに，$\beta - \alpha$ および直線 AB の方程式を m を用いて表せ。

(3) (2) の点 A，B から x 軸に垂線を下ろし，x 軸との交点をそれぞれ D，E とする。このとき，四角形 ABED の面積 S を m を用いて表せ。

(4) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 T を m を用いて表せ。

(5) (3) と (4) で求めた S，T について，

$$S : T = 3 : 2$$

となるような定数 m の値を求めよ。

（下書き用紙）

3 以下の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ。

(2) e を自然対数の底とする。$x > e$ の範囲において，関数

$$y = x^{\frac{1}{x}}$$

を考える。この両辺の対数を x について微分することにより，y は減少関数であることを示せ。また，$e < a < b$ のとき，$a^b > b^a$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n n(n-1)$$

であるとき，$a_{n+1} - a_n$ を n の式で表し，a_n が最大となる正の整数 n をすべて求めよ。

(4) 複素数平面上の点 $\mathrm{P}(z)$ が，原点を中心とする半径 3 の円の周上を動くとき，

$$w = \frac{z+3i}{z}$$

で表される点 $\mathrm{Q}(w)$ はどのような図形を描くか。

（下書き用紙）

$\boxed{4}$ 空間内の 3 点 A，B，C を頂点とする $\triangle$ABC を考える。2 辺 BC，AC の中点をそれぞれ M，N とし，中線 AM と BN の交点を G とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2) 2 点 P，Q が $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を満たすとき，3 点 P，Q，G は同一直線上にあることを示せ。

(3) $\triangle$ABC の頂点の座標が A$(0,0,1)$，B$(7,0,6)$，C$(2,12,5)$ であるとき，xy 平面上を動く点 P$(x,y,0)$ を考える。このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ。

(4) (3) において，特に点 P$(x,y,0)$ が，xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くものとする。$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ の最大値とそのときの P の座標，および最小値とそのときの P の座標を，それぞれ求めよ。

（下書き用紙）

5 2つの関数 $f(x)=\log x$，$g(x)=e^x$ がある。原点 O から 曲線 $C_1\colon y=f(x)$ に引いた接線を ℓ_1，接点を A とし，原点 O から 曲線 $C_2\colon y=g(x)$ に引いた接線を ℓ_2，接点を B とする。以下の問いに答えよ。

(1) 接線 ℓ_1 の方程式と接点 A の座標を求めよ。また，接線 ℓ_2 についても，その方程式と接点 B の座標を求めよ。

(2) C_1 と ℓ_1 および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(3) C_1，C_2，x 軸，y 軸および線分 AB で囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(4) 直線 AB に平行な直線 m と曲線 C_1，C_2 の交点を，それぞれ P，Q とする。Q の座標を (t, e^t) とおくとき，線分 PQ の長さを t の式で表し，PQ の長さの最小値と，そのときの P，Q の座標を求めよ。

（下書き用紙）

$\boxed{6}$ xy 平面上に放物線 $C: y = x^2$ と直線 $\ell: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ がある。$t > 0$ とし，ℓ 上を動く点 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)$ から C に接線を引く。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 P を通り，傾き m の直線が C に接するとき，m が満たす 2 次方程式を求めよ。さらに，この 2 次方程式は，常に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1) で求めた 2 次方程式の解を m_1，m_2 ($m_1 < m_2$) とする。このとき，$m_1 + m_2$，$m_1 m_2$，$m_2 - m_1$ を，それぞれ t の式で表せ。

(3) 傾き m_1，m_2 の 2 本の接線が x 軸の正の向きとなす角を，それぞれ θ_1，θ_2 $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき，$m_1 = \tan\theta_1$，$m_2 = \tan\theta_2$ を利用して $\tan(\theta_2 - \theta_1)$ を t の式で表せ。さらに，この式を $f(t)$ とおくとき，極限値 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ を求めよ。

(4) $t > 0$ であることに注意して，(3) の関数 $f(t)$ の最小値と，そのときの t の値および $\theta_2 - \theta_1$ の値を求めよ。

（下書き用紙）