

1

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + a = 3(x-1)^2 + a - 3$$

接線の傾きの最小は、 $f'(1) = a - 3 = -12$

よって $a = -9$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ は } x = -1, x = 3$$

増減表は

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$

極大値 $6 (x = -1)$

極小値 $-26 (x = 3)$

(2) 余弦定理より、 $\cos A = \frac{2^2 + 3^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$

$$AH = OA \cos A = \frac{2}{3} \quad HB = AB - AH = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$AH : HB = 2 : 7$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{7}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{9}\overrightarrow{OB}$$

$$\text{重心 } G \text{ より } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = \frac{4}{9}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{9}\overrightarrow{OB}$$

$$|\overrightarrow{GH}| = \frac{1}{9} |4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB = 2 \cdot 3 \cos A = 2$$

$$\begin{aligned} |4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 &= 16|\overrightarrow{OA}|^2 - 8\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 64 - 16 + 9 = 57 \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{GH}| = \frac{\sqrt{57}}{9}$$

(3) 真数条件から

$$5x > 0, x < 4, x > -1 \text{ より } 0 < x < 4$$

不等式から

$$\log_a 5x \geq \log_a (4-x) + \log_a (x+1)$$

(i) $a > 1$ のとき

$$5x \geq (4-x)(x+1)$$

$$5x \geq -x^2 + 3x + 4$$

$$x^2 + 2x - 4 \geq 0$$

$$\text{これを解いて } x \leq -1 - \sqrt{5}, x \geq -1 + \sqrt{5}$$

$$0 < x < 4 \text{ より } -1 + \sqrt{5} \leq x < 4$$

(ii) $0 < a < 1$ のとき

$$5x \leq (4-x)(x+1)$$

$$x^2 + 2x - 4 \leq 0$$

$$\text{これを解いて } -1 - \sqrt{5} \leq x \leq -1 + \sqrt{5}$$

$$0 < x < 4 \text{ より } 0 < x \leq -1 + \sqrt{5}$$

(4) $n \geq 3$ のとき

左辺は $2(n-1)$ 次式,

右辺は n 次式

$2(n-1) = n$ より $n = 2$ となり不適である。

したがって $f(x)$ は高々2次式までになる。

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。

$$(2ax+b)(2ax+b-5) = (3a+1)x^2 + (3b-7)x + (3c-12)$$

恒等式だから

$$4a^2 = 3a + 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$4ab - 10a = 3b - 7 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$b(b-5) = 3c - 12 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

a, b, c は整数より $a = 1$

$a = 1$ のとき $b = 3, c = 2$

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

2

(1) $C: y = (x - 3)^2$ $l: y = 2x + 9$ より,

交点は $(x - 3)^2 = 2x + 9$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x = 0, x = 8$$

したがって $p = 0, q = 8$

$x = k$ 上の格子点の個数 a_k

$$a_k = (2k + 9) - (k - 3)^2 + 1 = -k^2 + 8k + 1$$

求める格子点の個数を N

$$N = \sum_{k=0}^8 a_k = \sum_{k=0}^8 (-k^2 + 8k + 1) = -\frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 8 \frac{8 \cdot 9}{2} + 9 = 93$$

(2) $x + y = a$ とおくと

$$y = -x + a$$

これは、傾き -1 , y 切片 a の直線の式を表す。

a の最大は、直線が 点 $(8, 25)$ を通るときである。

最大値 33

a の最小は、直線が 点 $(2, 1)$ または $(3, 0)$ を通るときである。

最小値 3

(3) 頂点の x 座標が $x=k, x=k+1$ の正方形が存在するためには, $1 \leq k \leq 6$

$$1 \leq k \leq 2 \text{ のとき, } b_k = (2k+9) - (k-3)^2 = -k^2 + 8k$$

$$3 \leq k \leq 6 \text{ のとき, } b_k = (2k+9) - (k-2)^2 = -k^2 + 6k + 5$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^2 (-k^2 + 8k) = 0 + 7 + 12 = 19$$

$$\sum_{k=3}^6 (-k^2 + 6k + 5) = \sum_{k=1}^6 (-k^2 + 6k + 5) - \{(-1+6+5) + (-4+12+5)\}$$

$$= -\frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} + 6 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 30 - \{(-1+6+5) + (-4+12+5)\}$$

$$= -91 + 126 + 30 - 23 = 42$$

$$\text{正方形の個数と面積は等しいので } T = \sum_{k=1}^6 b_k = 19 + 42 = 61$$

$$S = \int_0^8 \{2x + 9 - (x-3)^2\} dx = \int_0^8 -x(x-8) dx = \frac{8^3}{6} = \frac{256}{3}$$

$$\frac{T}{S} = \frac{183}{256}$$

③

$$(1) \quad a_n = k, b_k = m - (k - 1) = -k + (m + 1)$$

$$a_k b_k = -k^2 + (m + 1)k = -\left(k - \frac{m + 1}{2}\right)^2 + \frac{(m + 1)^2}{4}$$

$$\text{最大値は } m \text{ が奇数のとき } \frac{(m + 1)^2}{4} \quad k = \frac{m + 1}{2}$$

$$m \text{ が偶数のとき } \frac{m^2 + 2m}{4} \quad k = \frac{m}{2}, k = \frac{m}{2} + 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k b_k &= \sum_{k=1}^m \{-k^2 + (m + 1)k\} = -\frac{m(m + 1)(2m + 1)}{6} + \frac{(m + 1)m(m + 1)}{2} \\ &= \frac{m(m + 1)}{6}(-2m - 1 + 3m + 3) = \frac{m(m + 1)(m + 2)}{6} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \text{余弦定理より, } \cos A = \frac{2^2 + 3^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$AH = OA \cos A = \frac{2}{3} \quad HB = AB - AH = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$AH : HB = 2 : 7$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{7}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{9}\overrightarrow{OB}$$

$$\text{重心G より } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = \frac{4}{9}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{9}\overrightarrow{OB}$$

$$|\overrightarrow{GH}| = \frac{1}{9}|4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB = 2 \cdot 3 \cos A = 2 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 &= 16|\overrightarrow{OA}|^2 - 8\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 64 - 16 + 9 = 57 \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{GH}| = \frac{\sqrt{57}}{9}$$

(3) $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log(1+x)$ とする。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{x^3}{1+x} > 0 \end{aligned}$$

$f(x)$ は単調増加で、 $f(0) = 0 - 0 = 0$

よって $x > 0$ で $f(x) > 0$

$x > 0$ のとき $\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ である。

(4) $a + b - x = t$ とおくと

$$-dt = dx$$

x	a	$\rightarrow$	b
t	b	$\rightarrow$	a

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_b^a f(t)(-1)dt = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

$$I = \int_1^2 \frac{x^2}{x^2 + (3-x)^2} dx$$

$t = 1 + 2 - x = 3 - x$ とおくと

$$dt = -dx$$

x	1	$\rightarrow$	2
t	2	$\rightarrow$	1

$$I = \int_1^2 \frac{x^2}{x^2 + (3-x)^2} dx$$

$$= \int_2^1 \frac{(3-t)^2}{(3-t)^2 + t^2} (-1)dt = \int_1^2 \frac{(3-t)^2}{t^2 + (3-t)^2} dt = \int_1^2 \frac{(3-x)^2}{x^2 + (3-x)^2} dx$$

$$I + I = \int_1^2 \frac{x^2}{x^2 + (3-x)^2} dx + \int_1^2 \frac{(3-x)^2}{x^2 + (3-x)^2} dx = \int_1^2 dx$$

$$2I = [x]_1^2 = 1$$

$$I = \int_1^2 \frac{x^2}{x^2 + (3-x)^2} dx = \frac{1}{2}$$

4

(1) $C: y = (x-3)^2$ $l: y = 2x+9$ より,

交点は $(x-3)^2 = 2x+9$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x = 0, x = 8$$

$$\text{したがって } p = 0, q = 8$$

$x = k$ 上の格子点の個数 a_k

$$a_k = (2k+9) - (k-3)^2 + 1 = -k^2 + 8k + 1$$

求める格子点の個数を N

$$N = \sum_{k=0}^8 a_k = \sum_{k=0}^8 (-k^2 + 8k + 1) = -\frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 8 \frac{8 \cdot 9}{2} + 9 = 93$$

(2) $x+y=a$ とおくと

$$y = -x + a$$

これは、傾き -1 、 y 切片 a の直線の式を表す。

a の最大は、直線が 点 $Q(8, 25)$ を通るときである。

最大値33

a の最小は、直線が 点 $Q(2, 1)$ または $Q(3, 0)$ を通るときである。

最小値3

(3) 頂点の x 座標が $x=k, x=k+1$ の正方形が存在するためには,

$$1 \leq k \leq 6$$

$$1 \leq k \leq 2 \text{ のとき, } b_k = (2k+9) - (k-3)^2 = -k^2 + 8k$$

$$3 \leq k \leq 6 \text{ のとき, } b_k = (2k+9) - (k-2)^2 = -k^2 + 6k + 5$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^2 (-k^2 + 8k) = 0 + 7 + 12 = 19$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^6 (-k^2 + 6k + 5) &= \sum_{k=1}^6 (-k^2 + 6k + 5) - \{(-1 + 6 + 5) + (-4 + 12 + 5)\} \\ &= -\frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} + 6 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 30 - \{(-1 + 6 + 5) + (-4 + 12 + 5)\} \\ &= -91 + 126 + 30 - 23 = 42 \end{aligned}$$

$$\text{正方形の個数と面積は等しいので } T = \sum_{k=1}^6 b_k = 19 + 42 = 61$$

$$S = \int_0^8 \{2x + 9 - (x-3)^2\} dx = \int_0^8 -x(x-8) dx = \frac{8^3}{6} = \frac{256}{3}$$

$$\frac{T}{S} = \frac{183}{256}$$

5

(1) 図より

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + a - \sqrt{a^2 - 1}$$

$$f(\pi) = 2$$

(2) $PQ = a$ より、 $PQ^2 = a^2$

$$a^2 = (x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = x^2 + 1^2 - 2x\cos\theta$$

よって求める方程式は

$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 - a^2 = 0$$

解の公式より

$$x = \cos\theta \pm \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}$$

$$(\cos\theta)^2 - (\sqrt{a^2 - \sin^2\theta})^2 = 1 - a^2 < 0 \text{ より}$$

$$-\sqrt{a^2 - \sin^2\theta} < \cos\theta < \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}$$

$$x = \cos\theta - \sqrt{a^2 - \sin^2\theta} < 0 \quad x = \cos\theta + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta} > 0$$

$$x > 0 \text{ より } x = \cos\theta + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}$$

(3) $f(\theta) = a + 1 - \cos\theta - \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}$

$$f'(\theta) = \sin\theta - \frac{1}{2}(a^2 - \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin\theta)\cos\theta$$

$$= \sin\theta + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2 - \sin^2\theta}}$$

$$= \sin\theta\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sqrt{a^2 - \sin^2\theta}}\right)$$

$$= \sin\theta \frac{\sqrt{a^2 - \sin^2\theta} + \cos\theta}{\sqrt{a^2 - \sin^2\theta}}$$

分数の部分では

$$\text{分母は } a > 1 \text{ より } \text{分母} = \sqrt{a^2 - \sin^2\theta} > 0$$

$$\text{分子は } \sqrt{a^2 - \sin^2\theta} + \cos\theta = x > 0$$

よって $f'(\theta)$ の符号は $\sin\theta$ の符号と一致する。

$0 \leq \theta \leq \pi$ において $f'(\theta) \geq 0$ で $f(\theta)$ は単調に増加する。

$\pi \leq \theta \leq 2\pi$ において $f'(\theta) \leq 0$ で $f(\theta)$ は単調に減少する。

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta)}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(a+1-\cos\theta) - \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}}{\theta^2} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(a+1-\cos\theta)^2 - (a^2 - \sin^2\theta)}{\theta^2(a+1-\cos\theta + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta})} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(a+1)^2 + \cos^2\theta - 2(a+1)\cos\theta - a^2 + \sin^2\theta}{\theta^2(a+1-\cos\theta + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta})} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2+2a-2(a+1)\cos\theta}{\theta^2(a+1-\cos\theta + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta})} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2(a+1)(1-\cos\theta)}{\theta^2(a+1-\cos\theta + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta})} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{4(a+1)\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2(a+1-\cos\theta + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta})} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{4(a+1)\sin^2\frac{\theta}{2}}{4\left(\frac{\theta^2}{2}\right)(a+1-\cos\theta + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta})} \\
 &= \frac{(a+1)}{2a}
 \end{aligned}$$

6

(1) $P(t, 0)$

$$Q(t + \sqrt{4 - t^2}, t)$$

$$R(\sqrt{4 - t^2}, t + \sqrt{4 - t^2})$$

$$S(0, \sqrt{4 - t^2})$$

(2) $Q(x, y)$ とすると

$$x = t + \sqrt{4 - t^2} \quad (0 \leq t \leq 2)$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{2}(4 - t^2)^{-\frac{1}{2}}(-2t) = 1 - \frac{t}{\sqrt{4 - t^2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\vec{v} = \left(1 - \frac{t}{\sqrt{4 - t^2}}, 1\right)$$

$$t = \sqrt{2} \text{ のとき } \vec{v} = (0, 1) \text{ より } |\vec{v}| = 1$$

(3) $Q(t + \sqrt{4 - t^2}, t)$ より

$$f(t) = t + \sqrt{4 - t^2} \quad (0 \leq t \leq 2)$$

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{2}(4 - t^2)^{-\frac{1}{2}}(-2t)$$

$$= 1 - \frac{t}{\sqrt{4 - t^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4 - t^2} - t}{\sqrt{4 - t^2}}$$

$$f'(t) = 0 \quad \text{は, } \sqrt{4 - t^2} = t \text{ のとき}$$

$$t = \sqrt{2}$$

$f(t)$ の増減表

t	0		$\sqrt{2}$		2
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

よって Q の x 座標の最大値は $2\sqrt{2}$ ($t = \sqrt{2}$)

このとき $Q(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $R(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

(4) $0 \leq t \leq 2$ のとき、 $D(\frac{t + \sqrt{4-t^2}}{2}, \frac{t + \sqrt{4-t^2}}{2})$ で

直線 $y=x$ 上を動き $x = \frac{f(t)}{2}$ より $1 \leq x \leq \sqrt{2}$

$2 \leq t \leq 4, 4 \leq t \leq 6, 6 \leq t \leq 8$ も、状況が変わらないので、
点Dは、直線 $y=x$ 上の $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲を動く。

(5) $2 \leq t \leq 4$ における点Pの軌跡と、 $0 \leq t \leq 2$ における点Qの軌跡は同じである。

$4 \leq t \leq 6$ における点Pの軌跡と、 $0 \leq t \leq 2$ における点Rの軌跡は同じである。

$6 \leq t \leq 8$ における点Pの軌跡と、 $0 \leq t \leq 2$ における点Sの軌跡は同じである。

(1) における $Q(t + \sqrt{4-t^2}, t)$ について
点 $Q(x, y)$ は、 $x = y + \sqrt{4-y^2}$ ($0 \leq y \leq 2$) 上にある。

(1) における $R(\sqrt{4-t^2}, t + \sqrt{4-t^2})$ について、
点 $R(x, y)$ は $x = \sqrt{4-t^2}$ $y = t + \sqrt{4-t^2}$ より
 $y = x + \sqrt{4-x^2}$ ($0 \leq x \leq 2$) 上にある。
2点Q, Rの描く図形全体は、直線 $y=x$ と対称である。

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_0^2 \{(x + \sqrt{4-x^2}) - 2\} dx + 4 \\ &= [x^2 - 4x]_0^2 + 4 + 2 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \\ &= 2 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = 4 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \end{aligned}$$

7

$$(1) \quad \text{積 } z_1 z_2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$$

$$\begin{aligned} \text{和 } z_1 + z_2 &= (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha + \cos\beta) + i(\sin\alpha + \sin\beta) \\ &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}) \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \text{ より, } -\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha-\beta}{2} < 0$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} > 0 \text{ だから極形式になる。}$$

$$(2) \quad w = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2} = \frac{2\{\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)\}}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2})} \\ = \frac{1}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2})$$

$$(1) \text{ より, } z_1 + z_2 = 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} w$$

$$2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \text{ は, 実数だから 3 点 } O, P, D \text{ は同一直線上にある。}$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{w - z_1}{0 - z_1} &= \frac{z_1 - w}{z_1} = 1 - \frac{w}{z_1} = 1 - \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \\ &= 1 - \frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{2} + i\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = i \tan\frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha-\beta}{2} < 0 \text{ より } \tan\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$$

純虚数になるので, 線分 OA と線分 AP は垂直である。

よって $OA \perp AP$ より, AP は円 C の接線である

(4) (3)から同様に線分OB と線分BP が垂直である。

詳しくは

$$\begin{aligned} \frac{w-z_2}{0-z_2} &= \frac{z_2-w}{z_2} = 1 - \frac{w}{z_2} = 1 - \frac{\frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} + i \sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}} \\ &= 1 - \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2} + i \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = -i \tan \frac{\alpha-\beta}{2} = i \tan \frac{\beta-\alpha}{2} \end{aligned}$$

$\tan \frac{\beta-\alpha}{2} \neq 0$ より純虚数になるので, 線分 OB と線分 BP は垂直である。

線分AB の中点($\frac{z_1+z_2}{2}$) と線分PQ の中点($\frac{w+v}{2}$) は, 一致するので,

$$\frac{z_1+z_2}{2} = \frac{w+v}{2}$$

$$\text{よって, } v = z_1 + z_2 - w = (2\cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} - 1)w = \cos(\alpha-\beta) w$$

$$\text{題意より, } |v|=1 \text{ よって, } \left| \cos(\alpha-\beta) \frac{1}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}} \right| = 1$$

$$\cos(\beta-\alpha) = \pm \cos \frac{\beta-\alpha}{2} \quad 2\cos^2 \frac{\beta-\alpha}{2} \pm \cos \frac{\beta-\alpha}{2} - 1 = 0$$

$$\cos \frac{\beta-\alpha}{2} = \pm \frac{1}{2} \quad 0 < \frac{\beta-\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ より, } \beta = \alpha + \frac{2}{3}\pi$$

(3)の別解①

$$\begin{aligned}
 \angle OAP &= \arg \frac{w - z_1}{0 - z_1} = \arg \frac{\frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2} - z_1}{-z_1} = \arg \left(\frac{-2z_2}{z_1 + z_2} + 1 \right) = \arg \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right) \\
 &= \arg \frac{(z_1 - z_2)(\overline{z_1 + z_2})}{(z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})} = \arg(z_1 - z_2)(\overline{z_1 + z_2}) - \arg|z_1 + z_2|^2 \\
 &= \arg(z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2) \\
 &= \arg(z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2) \\
 &= \arg[\{\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)\} - \{\cos(-\alpha + \beta) + i\sin(-\alpha + \beta)\}] \\
 &= \arg\{2i\sin(\alpha - \beta)\} = -\frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

したがって、 $OA \perp AP$ より、 AP は円C の接線である。

$$\begin{aligned}
 \angle OBP &= \arg \frac{w - z_2}{0 - z_2} = \arg \frac{\frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2} - z_2}{-z_2} \\
 &= \arg \left(\frac{-2z_1}{z_1 + z_2} + 1 \right) = \arg \left(-\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right) = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

(3)の別解②

線分OA と線分AP が垂直であることを示す。

$$\bullet \frac{w - z_1}{0 - z_1} = 1 - \frac{w}{z_1} = 1 - \frac{2z_2}{z_1 + z_2} = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2}$$

$$z_1 + z_2 \text{ を表すベクトルを } \vec{l} = (\cos\alpha + \cos\beta, \sin\alpha + \sin\beta)$$

$$z_1 - z_2 \text{ を表すベクトルを } \vec{m} = (\cos\alpha - \cos\beta, \sin\alpha - \sin\beta)$$

$$\vec{l} \cdot \vec{m} = (\cos^2\alpha - \cos^2\beta) + (\sin^2\alpha - \sin^2\beta) = 1 - 1 = 0$$

$$\vec{l} \neq \vec{0}, \vec{m} \neq \vec{0} \text{ より } \vec{l} \perp \vec{m}$$

$$OA \perp AP$$

8

(1) $P(t, 0)$

$$Q(t + \sqrt{4 - t^2}, t)$$

$$R(\sqrt{4 - t^2}, t + \sqrt{4 - t^2})$$

$$S(0, \sqrt{4 - t^2})$$

(2) $Q(x, y)$ とすると

$$x = t + \sqrt{4 - t^2} \quad (0 \leq t \leq 2)$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{2}(4 - t^2)^{-\frac{1}{2}}(-2t) = 1 - \frac{t}{\sqrt{4 - t^2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\vec{v} = \left(1 - \frac{t}{\sqrt{4 - t^2}}, 1\right)$$

$$t = \sqrt{2} \text{ のとき } \vec{v} = (0, 1) \text{ より } |\vec{v}| = 1$$

(3) $Q(t + \sqrt{4 - t^2}, t)$ より

$$f(t) = t + \sqrt{4 - t^2} \quad (0 \leq t \leq 2)$$

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{2}(4 - t^2)^{-\frac{1}{2}}(-2t) = 1 - \frac{t}{\sqrt{4 - t^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4 - t^2} - t}{\sqrt{4 - t^2}}$$

$$f'(t) = 0 \quad \text{は, } \sqrt{4 - t^2} = t \text{ のとき} \\ t = \sqrt{2}$$

$f(t)$ の増減表

t	0		$\sqrt{2}$		2
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

よって Q の x 座標の最大値は $2\sqrt{2}$ ($t = \sqrt{2}$)

このとき $Q(2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad R(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

(4) $0 \leq t \leq 2$ のとき、 $D(\frac{t + \sqrt{4-t^2}}{2}, \frac{t + \sqrt{4-t^2}}{2})$ で

直線 $y=x$ 上を動き $x = \frac{f(t)}{2}$ より $1 \leq x \leq \sqrt{2}$

$2 \leq t \leq 4, 4 \leq t \leq 6, 6 \leq t \leq 8$ も、状況が変わらないので、
点Dは、直線 $y=x$ 上の $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲を動く。

(5) $2 \leq t \leq 4$ における点Pの軌跡と、 $0 \leq t \leq 2$ における点Qの軌跡は同じである。

$4 \leq t \leq 6$ における点Pの軌跡と、 $0 \leq t \leq 2$ における点Rの軌跡は同じである。

$6 \leq t \leq 8$ における点Pの軌跡と、 $0 \leq t \leq 2$ における点Sの軌跡は同じである。

(1) における $Q(t + \sqrt{4-t^2}, t)$ について
点 $Q(x, y)$ は、 $x = y + \sqrt{4-y^2}$ ($0 \leq y \leq 2$) 上にある。

(1) における $R(\sqrt{4-t^2}, t + \sqrt{4-t^2})$ について、
点 $R(x, y)$ は $x = \sqrt{4-t^2}$ $y = t + \sqrt{4-t^2}$ より
 $y = x + \sqrt{4-x^2}$ ($0 \leq x \leq 2$) 上にある。
2点Q, Rの描く図形全体は、直線 $y=x$ と対称である。

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_0^2 \{(x + \sqrt{4-x^2}) - 2\} dx + 4 \\ &= [x^2 - 4x]_0^2 + 4 + 2 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \\ &= 2 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = 4 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \end{aligned}$$

9

(解)

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{58+61+56+59+52+62+65+59+68}{9} = 60$$

平均 60 g

$$(2) \quad s^2 = \frac{(-2)^2+1^2+(-4)^2+(-1)^2+(-8)^2+2^2+5^2+(-1)^2+8^2}{9} = 20$$

$$s = 2\sqrt{5}$$

分散20 標準偏差 $2\sqrt{5}$

(3) $\sigma=5$ より

信頼度 95%の母平均 m の信頼区間

$$60 - 1.96 \frac{5}{\sqrt{9}} \leq m \leq 60 + 1.96 \frac{5}{\sqrt{9}}$$

$$60 - 3.266 \leq m \leq 60 + 3.266$$

$$56.73 \leq m \leq 63.27$$

$$(4) \quad m_1 = \frac{m-10}{50} \quad \sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{50^2}$$

$$\text{表1から} \bar{X} = \frac{60-10}{50} = 1 \quad \sigma_1 = \frac{5}{50} = 0.1$$

m_1 に対する信頼度 95%の母平均 m の信頼区間

$$1 - 1.96 \frac{0.1}{3} \leq m_1 \leq 1 + 1.96 \frac{0.1}{3}$$

$$1 - 0.0653 \leq m_1 \leq 1 + 0.0653$$

$$0.93 \leq m_1 \leq 1.07$$

(5) 抽出した n 個の卵の重さの平均を m' とする。

信頼度 95%の母平均 m の信頼区間

$$m' - 1.96 \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq m' + 1.96 \frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$\text{信頼区間の重さは} 2 \cdot 1.96 \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 5$$

$$\sqrt{n} \geq 3.92$$

$$n \geq 15.3664$$

n の最小値は 16