令和7年度の本試験（解答）

$\boxed{1}$ 文系 オムニバス

（1） $y=a(x-1)^2-a+b$

軸の式は $x=1$　　定義域 $-1\leqq x\leqq 2$

$a\neq 0$ より,

（ｉ）$a>0$ のとき

$x=-1$ で最大値 4　$4=3a+b$

$x=1$ で最小値 -2　$-2=-a+b$

$a=\dfrac{3}{2}$　$b=-\dfrac{1}{2}$　（$a>0$ を満たす）

（ii）$a<0$ のとき

$x=1$ で最大値 4　$4=-a+b$

$x=-1$ で最小値 -2　$-2=3a+b$

$a=-\dfrac{3}{2}$　$b=\dfrac{5}{2}$　（$a<0$ を満たす）

（2） $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0\ (n\geqq 1)$ より

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$

$b_n=a_{n+1}-2a_n$　より

$b_{n+1}=2b_n$，　$b_1=a_2-2a_1=4-2=2$

数列$\{b_n\}$は 初項2，公比2 の等比数列

$b_n=2^n$

$b_n=a_{n+1}-2a_n=2^n$

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}$

$c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ より

$c_{n+1}-c_n=\dfrac{1}{2}$, $c_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$

数列$\{c_n\}$は 初項$\dfrac{1}{2}$，公差$\dfrac{1}{2}$ の等差数列

$c_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n}{2}$

$a_n=2^nc_n=n\cdot 2^{n-1}$

(3)　線分ADは$\angle$A の2等分線だから$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=4:5$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\mathrm{A}=4\cdot5\cdot\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}\left|5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2&=25\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+40\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+16\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\\&=25\cdot16+40\cdot\frac{5}{2}+16\cdot25=900\end{aligned}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\frac{\left|5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}{9}=\frac{30}{9}=\frac{10}{3}$$

(4―A)選択問題

円Cをx軸方向に3倍, y軸方向に2倍した楕円Dは, 円Cの半径2だから

x軸との交点は, $(-3,0)$,$(3,0)$

y軸との交点は, $(0,-2)$,$(0,2)$

だ円Dの式は, $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

点A(0, 2)であるから

$$\mathrm{AP}^2=x^2+(y-2)^2=9\left(1-\frac{1}{4}y^2\right)+(y-2)^2$$

$$=9-\frac{9}{4}y^2+y^2-4y+4$$

$$=-\frac{5}{4}y^2-4y+13$$

$$=-\frac{5}{4}\left(y^2+\frac{16}{5}y\right)+13$$

$$=-\frac{5}{4}\left(y+\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5}+13$$

$$=-\frac{5}{4}\left(y+\frac{8}{5}\right)^2+\frac{81}{5}$$

$-2\leqq y\leqq 2$ より$y=-\dfrac{8}{5}$のとき AP の最大値は$\dfrac{9}{\sqrt{5}}$

$$x^2=9\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{64}{25}\right)=\frac{9\cdot 36}{100}$$

より$x=\pm\dfrac{9}{5}$

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{9}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$ または$\mathrm{P}\left(\dfrac{9}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$

（4―B）選択問題

$0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x)$ が確率密度関数になるためには

$0 \leqq x \leqq 1$ で $f(x) \geqq 0$, $\int_0^1 f(x)dx = 1$ でなければならない。

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 kx(x-1)dx = -\frac{k}{6} = 1$$

$$k = -6$$

$f(x) = -6x(x-1)$ は, $0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x) \geqq 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(0 \leqq \mathrm{X} \leqq \frac{1}{4}) &= \int_0^{\frac{1}{4}} -6x(x-1)dx = -6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{4}} \\ &= -2\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{5}{32} \end{aligned}$$

$\mathrm{P}(0 \leqq \mathrm{X} \leqq \frac{1}{4}) + \mathrm{P}(\frac{1}{4} \leqq \mathrm{X} \leqq 1) = 1$ より

$$\mathrm{P}(\frac{1}{4} \leqq \mathrm{X} \leqq 1) = 1 - \mathrm{P}(0 \leqq \mathrm{X} \leqq \frac{1}{4}) = 1 - \frac{5}{32} = \frac{27}{32}$$

$\boxed{2}$ 文系(情報・水産)オムニバス

(1) $y=f(x)=x^2-2ax+a$

$y=(x-a)^2-a^2+a$

$y=f(x)$ は, 軸が$x=a$, 頂点が$(a, -a^2+a)$ で下に凸の 2 次関数

$0<x<3$ の範囲に, 異なる 2 つの実数解を持つためには,

異なる 2 つの実数解をもつので$D>0$ ･･･①

軸の位置$x=a$ が $0<x<3$ にある････②

$f(0)>0$ ････③

$f(3)>0$ ････④

①より $\dfrac{D}{4}=a^2-a=a(a-1)>0$ よって$a<0$, $a>1$ ･･･⑤

②より $0<a<3$ ････⑥

③より$f(0)=a>0$ ････⑦

④より$f(3)=9-5a>0$ よって$a<\dfrac{9}{5}$ ････⑧

⑤, ⑥, ⑦, ⑧より $1<a<\dfrac{9}{5}$

（2） $\sin x+\cos y=1$ より, $\cos y=1-\sin x$

$4\cos^2 x-\sin^2 y=\dfrac{9}{4}$ より $4\cos^2 x-(1-\cos^2 y)=\dfrac{9}{4}$

したがって， $4\cos^2 x-1+(1-\sin x)^2=\dfrac{9}{4}$

$4(1-\sin^2 x)-1+1-2\sin x+\sin^2 x=\dfrac{9}{4}$

$-3\sin^2 x-2\sin x+\dfrac{7}{4}=0$

$12\sin^2 x+8\sin x-7=0$

$(2\sin x-1)(6\sin x+7)=0$

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ より $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$\cos y=\dfrac{1}{2}$

$0<y<x<\pi$ より

$x=\dfrac{5\pi}{6},\ y=\dfrac{\pi}{3}$

$(x,y)=\left(\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$

（3） 関数 $f(x)=\log_2 x+2\log_2(3-x)$

真数条件より $0<x<3$

$f(x)=\log_2 x(3-x)^2=\log_2 x(x-3)^2$

$g(x)=x(x-3)^2$ とおくと

$g(x)=x^3-6x^2+9x$

$g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

増減表は

x	0		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	4	↘	

$0<x<3$ において $g(x)$ の最大値は4

底2は1より大きいので

$x=1$ のとき $f(x)$ の最大値は $\log_2 4=2$

$\boxed{3}$ 文系

(1)　図より

点Aは, $y=-x^2+x$と$y=ax$の交点である。

$$-x^2+x=ax$$

$$x^2+ax-x=0$$

$$x\neq 0\text{ より }\ x=1-a$$

点Bは, $y=x^2-x$と$y=ax$の交点である。

$$x^2-x=ax$$

$$x^2-ax-x=0$$

$$x\neq 0\text{ より }\ x=a+1$$

図より, 点Aのx座標は,　$0<1-a<1$

よって　$0<a<1$ ・・・・・・・①

同様に, 点Bのx座標は,　$a+1>1$

よって　$a>0$ ・・・・・・・・・・②

①②より　$0<a<1$

(2) 図より

$$\mathrm{S}_1=\int_0^{1-a}(-x^2+x-ax)dx=-\int_0^{1-a}x\{x-(1-a)\}dx=\frac{(1-a)^3}{6}$$

(3) 図より

$$\mathrm{S}_2=\int_{1-a}^{1}\{ax-(-x^2+x)\}dx+\int_1^{1+a}\{ax-(x^2-x)\}dx$$

$$=\int_{1-a}^{1+a}ax\,dx+\int_{1-a}^{1}(x^2-x)\,dx-\int_1^{1+a}(x^2-x)dx$$

$$=\frac{a}{2}[x^2]_{1-a}^{1+a}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{1-a}^{1}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^{1+a}$$

$$=\frac{a}{2}\cdot 4a+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left\{\frac{(1-a)^3}{3}-\frac{(1-a)^2}{2}\right\}-\left\{\frac{(1+a)^3}{3}-\frac{(1+a)^2}{2}\right\}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1-3a+3a^2-a^3}{3}-\frac{1+3a+3a^2+a^3}{3}+\frac{(1-a)^2}{2}+\frac{(1+a)^2}{2}+2a^2-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{-6a^2-2}{3}+(1+a^2)+2a^2-\frac{1}{3}$$

$$=a^2$$

（4） $S_1+S_2=\dfrac{(1-a)^3}{6}+a^2$

$=\dfrac{-a^3+3a^2-3a+1+6a^2}{6}=\dfrac{-a^3+9a^2-3a+1}{6}$

$S(a)=S_1+S_2$

$S'(a)=\dfrac{-3a^2+18a-3}{6}=\dfrac{-(a^2-6a+1)}{2}$

$S'(a)=0$ は　$a=3\pm2\sqrt{2}$

$0<a<1$ より　$a=3-2\sqrt{2}$

a	0		$3-2\sqrt{2}$		1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$\frac{1}{6}$	↘	最小値	↗	1

$S(a)=\dfrac{(a^2-6a+1)(-a+3)+16a-2}{6}$ より

$S(3-2\sqrt{2})=\dfrac{16(3-2\sqrt{2})-2}{6}=\dfrac{23-16\sqrt{2}}{3}$ （最小値）

このとき　$a=3-2\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ 理系（医学部を除く） オムニバス

（1） $y=a(x-1)^2-a+b$

軸の式は $x=1$ 定義域 $-1 \leqq x \leqq 2$

$a \fallingdotseq 0$ より，

（ｉ）$a>0$ のとき

$x=-1$ で最大値 4 $4=3a+b$

$x=1$ で最小値 -2 $-2=-a+b$

$$a=\frac{3}{2} \quad b=-\frac{1}{2}$$ （$a>0$ を満たす）

（ii）$a<0$ のとき

$x=1$ で最大値 4 $4=-a+b$

$x=-1$ で最小値 -2 $-2=3a+b$

$$a=-\frac{3}{2} \quad b=\frac{5}{2}$$ （$a<0$ を満たす）

（2） $\sin x+\cos y=1$ より, $\cos y=1-\sin x$

$4\cos^2 x-\sin^2 y=\frac{9}{4}$ より　$4\cos^2 x-(1-\cos^2 y)=\frac{9}{4}$

したがって，　$4\cos^2 x-1+(1-\sin x)^2=\frac{9}{4}$

$4(1-\sin^2 x)-1+1-2\sin x+\sin^2 x=\frac{9}{4}$

$-3\sin^2 x-2\sin x+\frac{7}{4}=0$

$12\sin^2 x+8\sin x-7=0$

$(2\sin x-1)(6\sin x+7)=0$

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ より$\sin x=\frac{1}{2}$

$\cos y=\frac{1}{2}$

$0<y<x<\pi$ より

$x=\frac{5\pi}{6}, y=\frac{\pi}{3}$

$(x,y)=(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$

(3—A)選択問題

円Cをx軸方向に3倍，y軸方向に2倍した楕円Dは，円Cの半径2だから
x軸との交点が，$(-3,0)$，$(3,0)$
y軸との交点が，$(0,-2)$，$(0,2)$ だから
だ円Dの式は，$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

点A(0，2)であるから

$$\mathrm{AP}^2=x^2+(y-2)^2=9\left(1-\frac{1}{4}y^2\right)+(y-2)^2$$

$$=9-\frac{9}{4}y^2+y^2-4y+4$$

$$=-\frac{5}{4}y^2-4y+13$$

$$=-\frac{5}{4}\left(y^2+\frac{16}{5}y\right)+13$$

$$=-\frac{5}{4}\left(y+\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5}+13$$

$$=-\frac{5}{4}\left(y+\frac{8}{5}\right)^2+\frac{81}{5}$$

$-2\leqq y\leqq 2$ より$y=-\dfrac{8}{5}$ のとき　APの最大値は$\dfrac{9}{\sqrt{5}}$

$x^2=9\left(1-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{64}{25}\right)=\dfrac{9\cdot 36}{100}$ より$x=\pm\dfrac{9}{5}$

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{9}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$ または$\mathrm{P}\left(\dfrac{9}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$

(3―B)選択問題

$0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x)$ が確率密度関数になるためには

$0 \leqq x \leqq 1$ で $f(x) \geqq 0$, $\int_0^1 f(x)dx = 1$ でなければならない。

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 kx(x-1)dx = -\frac{k}{6} = 1$$

$k = -6$

$f(x) = -6x(x-1)$ は, $0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x) \geqq 0$

$$P(0 \leqq \mathrm{X} \leqq a) = \int_0^a -6x(x-1)dx = -6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^a = -2a^3 + 3a^2$$

$P(0 \leqq \mathrm{X} \leqq a) + P(a \leqq \mathrm{X} \leqq 1) = 1$

$P(0 \leqq \mathrm{X} \leqq a) = \frac{7}{20} P(a \leqq \mathrm{X} \leqq 1)$ より

$$P(0 \leqq \mathrm{X} \leqq a) = 1 \times \frac{7}{27} = \frac{7}{27} = -2a^3 + 3a^2$$

$54a^3 - 81a^2 + 7 = 0$

$(3a-1)(18a^2 - 21a - 7) = 0$

$$a = \frac{1}{3}, a = \frac{21 \pm \sqrt{945}}{36} = \frac{7 \pm \sqrt{105}}{12}$$

$0 \leqq a \leqq 1$ より $a = \frac{1}{3}$

$\boxed{5}$ 理系（医学部を除く） オムニバス

（1） $4\alpha^2-6\alpha\beta+3\beta^2=0$

$\alpha \fallingdotseq 0$ より

両辺をα^2で割ると， $3(\frac{\beta}{\alpha})^2-6\frac{\beta}{\alpha}+4=0$

解の公式から $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{3}$

$0\leqq arg\frac{\beta}{\alpha}<\pi$ より$\frac{\beta}{\alpha}$の虚部は正だから

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3+\sqrt{3}i}{3}$

$arg\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{6}$

$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ より

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha}&=\frac{3+\sqrt{3}i}{3}\\&=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)\\&=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\end{aligned}$$

(2)　$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0\ (n\geqq 1)$ より

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$

$b_n=a_{n+1}-2a_n$　より

$b_{n+1}=2b_n$，　$b_1=a_2-2a_1=4-2=2$

数列$\{b_n\}$ は 初項2， 公比2 の等比数列

$b_n=2^n$

$b_n=a_{n+1}-2a_n=2^n$

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}$

$c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ より

$c_{n+1}-c_n=\dfrac{1}{2}$，　$c_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$

数列$\{c_n\}$ は 初項$\dfrac{1}{2}$， 公差$\dfrac{1}{2}$ の等差数列

$c_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n}{2}$

$a_n=2^nc_n=n\cdot 2^{n-1}$

(3)　$\displaystyle\int_0^1\log(x^2+1)dx=\int_0^1 x'\log(x^2+1)dx=[x\log(x^2+1)]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx$

$\displaystyle=\log 2-2\int_0^1(1-\frac{1}{x^2+1})dx=\log 2-2[x]_0^1+2\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$

$\displaystyle=\log 2-2+2\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$

$x=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{4}$

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$

よって$\displaystyle\int_0^1\log(x^2+1)dx=\log 2-2+2\cdot\frac{\pi}{4}=\log 2+\frac{\pi}{2}-2$

$\boxed{6}$ 理系(医学部を除く)

(1) $C : y = x^2$ より $y' = 2x$

接線 $l : y = -2(x+1)+1 = -2x-1$

法線 $l' : y = \frac{1}{2}(x+1)+1 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

(2) 接線 $m : y = 2t(x-t)+t^2 = 2tx - t^2$

法線 $m' : y = -\frac{1}{2t}(x-t)+t^2 = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$

(3) l' と m' の交点R は

$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$

$x + 3 = -\frac{1}{t}x + 2t^2 + 1$

$(1 + \frac{1}{t})x = 2(t^2 - 1)$

$x = 2t(t-1) \quad y = t^2 - t + \frac{3}{2}$

$\mathrm{R}(\,2t(t-1)\,,\, t^2 - t + \frac{3}{2})$

$\mathrm{P} \to \mathrm{A}$ のとき, $t \to -1$

$x = 2t(t-1) \to 4$

$y = t^2 - t + \frac{3}{2} \to \frac{7}{2}$

$\mathrm{R} \to \mathrm{R}_0(\,4\,,\,\frac{7}{2})$

(4)　半径$\mathrm{R_0A}=\sqrt{(4+1)^2+(\frac{7}{2}-1)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

円$D:(x-4)^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{125}{4}$

曲線C： $y=x^2$ より，$(x-4)^2+(x^2-\frac{7}{2})^2=\frac{125}{4}$

整理して　$x^4-6x^2-8x-3=0$

$(x+1)^3(x-3)=0$

$x=-1\,,\,x=3$

共有点は，$\mathrm{A}(-1\,,1)$，$\mathrm{B}(3,9)$

よって　$\mathrm{B}(3,9)$

(5)　$\mathrm{A}(-1,1)\,,\,\mathrm{R_0}(4\,,\frac{7}{2})$ より　$\mathrm{E}(9\,,6)$ である。

点$\mathrm{B}(3\,,9)$ より

$\mathrm{AE}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$　　$\mathrm{AB}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$　　$\mathrm{BE}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$\triangle\mathrm{ABE}$ は直角三角形より$\triangle\mathrm{ABE}=\frac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{5}\cdot4\sqrt{5}=30$

線分AB と曲線C で囲まれる図形の面積S_1

直線AB の式は　$y=2x+3$

$$S_1=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx=\frac{32}{3}$$

求める面積S＝ 半円D ＋$\triangle\mathrm{ABE}-S_1$

$$=\frac{1}{2}\pi(\frac{5\sqrt{5}}{2})^2+30-\frac{32}{3}$$

$$=\frac{125}{8}\pi+\frac{58}{3}$$

$\boxed{7}$ 理系（医学部を除く）

(1)　$l=2\theta$

$\mathrm{D}(\pi,2)$

(2)　$\mathrm{E}(2\cos\theta,0)$，$\mathrm{F}(2\cos\theta+2\theta\sin\theta,0)$

$\mathrm{P}(2\cos\theta,2\sin\theta)$　$\mathrm{Q}(2\cos\theta+2\theta\sin\theta,2\sin\theta-2\theta\cos\theta)$

(3)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\left(-\frac{1}{2}\cos2\theta\right)'d\theta$

$$=\left[-\frac{\theta}{2}\cos2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\left[\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\quad=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\cos2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\left(\frac{1}{2}\sin2\theta\right)'d\theta$$

$$=\left[\frac{\theta^2}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin2\theta\,d\theta\quad=-\frac{\pi}{4}$$

(4)　点D からx 軸に下した垂線の足H とする。

また，点Q が描く曲線とx 軸および線分DH で囲まれた部分の面積S_1とする。

$$S_1=\int_2^{\pi} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin\theta-2\theta\cos\theta)2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\theta\sin\theta\cos\theta-\theta^2\cos^2\theta)d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}\theta\sin2\theta-\theta^2\cos^2\theta)d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\theta}{2}\sin2\theta-\theta^2\frac{1+\cos2\theta}{2})d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\theta\sin\theta-\theta^2-\theta^2\cos2\theta)d\theta$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{4}-2\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2(-\frac{\pi}{4})=\pi-\frac{\pi^3}{12}$$

$$S=2\pi-\frac{4\pi}{4}-(\pi-\frac{\pi^3}{12})=\frac{\pi^3}{12}$$

(5)　Q(x,y) とすると

$$x=2\cos\theta+2\theta\sin\theta \qquad y=2\sin\theta-2\theta\cos\theta$$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-2\sin\theta+2\sin\theta+2\theta\cos\theta)^2+(2\cos\theta-2\cos\theta+2\theta\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\theta^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\,d\theta=[\theta^2]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$$

$\boxed{8}$ 医学部オムニバス

（1）関数 $f(x)=\log_2 x+2\log_2(3-x)$

真数条件より　$0<x<3$

$f(x)=\log_2 x(3-x)^2=\log_2 x(x-3)^2$

$g(x)=x(x-3)^2$ とおくと

$g(x)=x^3-6x^2+9x$

$g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

増減表は

x	0		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	4	↘	

$0<x<3$ において　$g(x)$ の最大値は4

底2は1より大きいので

$x=1$ のとき $f(x)$ の最大値は $\log_2 4=2$

（2） $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0\ (n\geqq 1)$ より

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$

$b_n=a_{n+1}-2a_n$ より

$b_{n+1}=2b_n$

$b_1=a_2-2a_1=4-2=2$

数列$\{b_n\}$は 初項2，公比2 の等比数列

$b_n=2^n$

$b_n=a_{n+1}-2a_n=2^n$

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}$

$c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ より

$c_{n+1}-c_n=\dfrac{1}{2}$ ，$c_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$

数列$\{c_n\}$は 初項$\dfrac{1}{2}$， 公差$\dfrac{1}{2}$ の等差数列

$c_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n}{2}$

$a_n=2^n c_n=n\cdot 2^{n-1}$

(3—A)選択問題

$4\alpha^2-6\alpha\beta+3\beta^2=0$

$\alpha \fallingdotseq 0$ より

両辺をα^2で割ると， $3(\frac{\beta}{\alpha})^2-6\frac{\beta}{\alpha}+4=0$

解の公式から $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{3}$

$0\leqq arg\frac{\beta}{\alpha}<\pi$ より $\frac{\beta}{\alpha}$ の虚部は正だから

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3+\sqrt{3}i}{3}$

$arg\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{6}$

$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ より，

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3+\sqrt{3}i}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ より $|\beta|=\frac{2\sqrt{3}}{3}|\alpha|$ つまり$\mathrm{OB}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{OA}$

また，$\angle\mathrm{AOB}=arg(\frac{\beta}{\alpha})=\frac{\pi}{6}$ より

余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\frac{\pi}{6}\\&=\mathrm{OA}^2+\frac{12}{9}\mathrm{OA}^2-2\mathrm{OA}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{OA}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=(1+\frac{4}{3}-2)\mathrm{OA}^2=\frac{1}{3}\mathrm{OA}^2\end{aligned}$$

$\mathrm{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{OA}$

$\mathrm{AB}:\mathrm{OB}:\mathrm{OA}=\frac{\sqrt{3}}{3}:\frac{2\sqrt{3}}{3}:1=1:2:\sqrt{3}$

三角形OAB は$\angle\mathrm{O}=\frac{\pi}{6}$,$\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$,$\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{3}$ とする直角三角形

(３－B)選択問題

$0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)$ が確率密度関数になるためには

$0\leqq x\leqq 1$ で $f(x)\geqq 0$, $\int_0^1 f(x)dx=1$ でなければならない。

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 kx(x-1)dx=-\frac{k}{6}=1$$

$k=-6$

$f(x)=-6x(x-1)$ は, $0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)\geqq 0$

$$P(0\leqq \mathrm{X}\leqq a)=\int_0^a -6x(x-1)dx=-6\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^a=-2a^3+3a^2$$

$$P(0\leqq \mathrm{X}\leqq a)+P(a\leqq \mathrm{X}\leqq 1)=1$$

$P(0\leqq \mathrm{X}\leqq a)=\frac{7}{20}P(a\leqq \mathrm{X}\leqq 1)$ より

$$P(0\leqq \mathrm{X}\leqq a)=1\times\frac{7}{27}=\frac{7}{27}=-2a^3+3a^2$$

$$54a^3-81a^2+7=0$$

$$(3a-1)(18a^2-21a-7)=0$$

$$a=\frac{1}{3},a=\frac{21\pm\sqrt{945}}{36}=\frac{7\pm\sqrt{105}}{12}$$

$0\leqq a\leqq 1$ より $a=\frac{1}{3}$

$\boxed{9}$ 医学部

（1） △AOB のの領域を不等式で表すと

$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $y \leqq -2x+2$

（2） $\mathrm{P}(t, 2-2t)$ より $\mathrm{Q}(t, 0)$, $\mathrm{R}(0, 2-2t)$ である。

直線l_2は, $0<t<1$ のとき直線QR だから

$$\frac{x}{t}+\frac{y}{2-2t}=1$$

したがって $(2-2t)x+ty=t(2-2t)$

$$2t^2+(-2x+y-2)t+2x=0$$

$t=0$ のとき l_2 は 直線 $x=0$ であり, 方程式を満たす。

$t=1$ のとき l_2 は 直線 $y=0$ であり, 方程式を満たす。

$0 \leqq t \leqq 1$ で $2t^2-(2x-y+2)t+2x=0$

$2t^2+at+b=0$ より

$a=-2x+y-2$, $b=2x$

（3） 点$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ をl_2 が通るとすると,

$$a=-2x+y-2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2=-2$$

$b=2x=\frac{1}{2}$ より,

方程式は, $2t^2-2t+\frac{1}{2}=0$

$4t^2-4t+1=0$

$t=\frac{1}{2}$

$0 \leqq t \leqq 1$ より$t=\frac{1}{2}$ は満たされており, $\mathrm{P}(\frac{1}{2},1)$, $\mathrm{Q}(\frac{1}{2},0)$, $\mathrm{R}(1,0)$ である。

つまり, 点$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ を通る直線$l_2: y=-2x+1$ が存在する。

また, 点$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ は△AOB の内部の点だから点$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ は領域Fに含まれる。

(4)　$f(t)=2t^2+at+b$ とおく。

△AOB の周および内部の点(x,y) を l_2 が通るとすると,

$0\leqq t\leqq 1$ において $f(t)=0$ となる解 t があればよい。

$f(0)=b=2x\geqq 0$　よって $x\geqq 0$ ・・・・・・・・①

$f(1)=2+a+b=2+(-2x+y-2)+2x=y\geqq 0$ ・・・・・②

したがって　放物線 $f(t)$ の軸が $0\leqq t\leqq 1$ を満たし、判別式 $\mathrm{D}\geqq 0$ であればよい。

軸は $t=-\dfrac{a}{4}$ より　$0\leqq -\dfrac{a}{4}\leqq 1$

$-4\leqq a\leqq 0$

$-4\leqq -2x+y-2\leqq 0$

$2x-2\leqq y\leqq 2x+2$ ・・・③

判別式　$\mathrm{D}=a^2-8b\geqq 0$

$(-2x+y-2)^2-16x=(y-2x-2+4\sqrt{x})(y-2x-2-4\sqrt{x})\geqq 0$

$y\leqq 2x+2-4\sqrt{x}$　または　$y\geqq 2x+2+4\sqrt{x}$ ・・・④

①, ②, ③, ④より領域 F を表す不等式は、

$x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $2x-2\leqq y\leqq 2x+2$, $y\leqq 2x+2-4\sqrt{x}$　または　$y\geqq 2x+2+4\sqrt{x}$

△AOB の周および内部の点(x,y) について整理すると

$0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 2x+2-4\sqrt{x}$

(5)　$y=2x+2-4\sqrt{x}$ は

$0\leqq x\leqq 1$ において

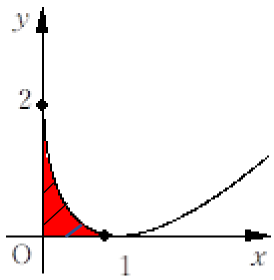
$y'=2-2x^{-\frac{1}{2}}=2(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}})=\dfrac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$

$y'\leqq 0$ よりグラフは単調減少

$y''=x^{-\frac{3}{2}}$

$y''\geqq 0$ よりグラフは下に凸

領域 F を図示すると



(4)の不等式の領域を xy 平面表すと図の斜線部分であり, 境界を含む。

したがって, 領域 F を表す不等式は, $0\leqq x\leqq 1$,$0\leqq y\leqq 2x+2-4\sqrt{x}$ となる。

この領域 F の図形の面積 S は

$$S=\int_0^1(2x+2-4\sqrt{x})dx=\left[x^2+2x-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$\boxed{10}$ 医学部

(1) $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}$

$=\overrightarrow{OP}+t\,\overrightarrow{PQ}$

$=(\cos\theta, \sin\theta, 0)+t\,(\cos(\theta+\alpha)-\cos\theta\ ,\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta, 1)$

$=(\cos\theta+t(\cos(\theta+\alpha)-\cos\theta), \sin\theta+t(\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta), t)$

$=((1-t)\cos\theta+t\cos(\theta+\alpha), (1-t)\sin\theta+t\sin(\theta+\alpha), t)$

よって$R(x,y,z)$において

$x=(1-t)\cos\theta+t\cos(\theta+\alpha)$

$y=(1-t)\sin\theta+t\sin(\theta+\alpha)$

$z=t$

(2) 点Rとz軸との距離dは, 点Rからz軸上の点$(0,0,t)$までの距離である。

$d^2=(1-t)^2\cos^2\theta+t^2\cos^2(\theta+\alpha)+2t(1-t)\cos(\theta+\alpha)\cos\theta$
$\quad+(1-t)^2\sin^2\theta+t^2\sin^2(\theta+\alpha)+2t(1-t)\sin(\theta+\alpha)\sin\theta$

$=(1-t)^2+t^2+2t(1-t)\{\cos(\theta+\alpha)\cos\theta+\sin(\theta+\alpha)\sin\theta\}$

$=2t^2-2t+1+2t(1-t)\cos(\theta+\alpha-\theta)$

$=2t^2-2t+1+2t(1-t)\cos\alpha$

$=(2-2\cos\alpha)t^2-(2-2\cos\alpha)t+1$

$=2(1-\cos\alpha)(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1+\cos\alpha}{2}$

d^2の最小値は

$0<\alpha\leqq\pi$より $1-\cos\alpha>0$

$t=\frac{1}{2}$のとき $d^2=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

$$d=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\cos\frac{\alpha}{2}$$

(3)　平面　$z=t$ と立体Fが交わる円の面積$\mathrm{S}(t)$ とする。

$0<\alpha\leqq\pi$ のとき，

$\mathrm{S}(t)=\pi d^2$

$=\pi\{2(1-\cos\alpha)(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1+\cos\alpha}{2}\}$

$\mathrm{V}=\int_0^1 \mathrm{S}(t)\,dt=\pi\int_0^1\{2(1-\cos\alpha)(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1+\cos\alpha}{2}\}dt$

$=\pi\left[\frac{2}{3}(1-\cos\alpha)(t-\frac{1}{2})^3+\frac{1+\cos\alpha}{2}t\right]_0^1$

$=\pi\{\frac{2}{24}(1-\cos\alpha)+\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)+\frac{2}{24}(1-\cos\alpha)\}$

$=\pi(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\alpha)$

$=\frac{\pi(2+\cos\alpha)}{3}$

$\alpha=0$ のとき

$d=1$ であり，$\mathrm{S}(t)=\pi$

$\mathrm{V}=\int_0^1\pi dt=\pi$

よって$0\leqq\alpha\leqq\pi$ において　$\mathrm{V}=\frac{\pi(2+\cos\alpha)}{3}$

(4)　$0\leqq\alpha\leqq\pi$ において，$\frac{\pi}{3}\leqq\mathrm{V}\leqq\pi$

$\alpha=\pi$ で，V の最小値は　$\frac{\pi}{3}$

立体F の形状　は，円C と円D を底面とし，頂点$(0,0,\frac{1}{2})$ を共有する

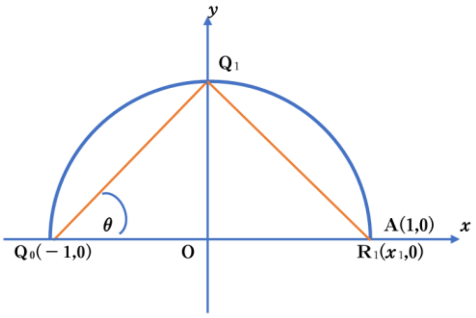
2つの直円錐

$\alpha=0$ で，V の最大値は　π

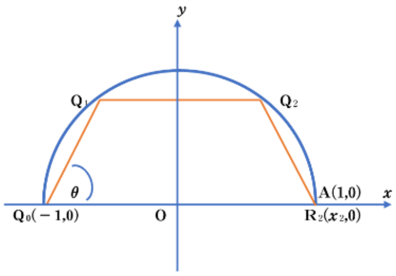
立体F の形状は，円C と円D を底面とする高さ1の直円柱

$\boxed{11}$ 医学部

（1）　（図1）　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$



（図2）$\theta=\dfrac{\pi}{3}$



（2）一回の反射でx 軸に達するときは，(1)より$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$

$\triangle OQ_1R_1$ において　$\angle OR_1Q_1=\pi-3\theta$

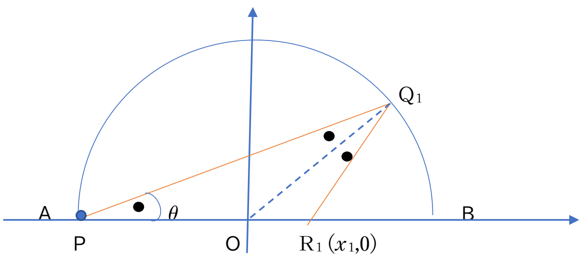
正弦定理より，$\dfrac{OR_1}{\sin\angle OQ_1R_1}=\dfrac{OQ_1}{\sin\angle OR_1Q_1}$

$\dfrac{x_1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin(\pi-3\theta)}$

$x_1=\dfrac{\sin\theta}{\sin3\theta}=\dfrac{1}{3-4\sin^2\theta}$

$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より　$0<\sin\theta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$\dfrac{1}{3}<x_1\leqq1$



(3)　R_{n-1} が A と一致するとき，
底角 θ の二等辺三角形が n 個繋がればよいので，

$$n(\pi-2\theta)=\pi$$
$$2n\theta=(n-1)\pi$$
$$\theta=\frac{n-1}{2n}\pi$$

R_n が A と一致するとき，
底角 θ の二等辺三角形が $(n+1)$ 個繋がるので，

$$(n+1)(\pi-2\theta)=\pi$$
$$2(n+1)\theta=n\pi$$
$$\theta=\frac{n}{2(n+1)}\pi$$

よって小球 P が n 回の反射で x 軸に到達するとき $\frac{n-1}{2n}\pi<\theta\leqq\frac{n}{2(n+1)}\pi$

また，$\triangle OQ_nR_n$ において

$$\begin{aligned}\angle OR_nQ_n&=\pi-(\theta+\angle R_nOQ_n)\\&=\pi-\theta-\angle R_nOQ_n\\&=\pi-\theta-\{\pi-n(\pi-2\theta)\}\\&=n\pi-(2n+1)\theta\end{aligned}$$

正弦定理より，$\dfrac{OR_n}{\sin\angle OQ_nR_n}=\dfrac{OQ_n}{\sin\angle OR_nQ_n}$

$$\frac{OR_n}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(n\pi-(2n+1)\theta)}$$

$$x_n=OR_n=\frac{\sin\theta}{\sin\{n\pi-(2n+1)\theta\}}$$

（4） $\angle \mathrm{Q}_n\mathrm{OR}_n=\pi-n(\pi-2\theta)=(1-n)\pi+2n\theta$

$$\mathrm{S}_n=\frac{1}{2}\mathrm{OQ}_n\cdot\mathrm{OR}_n\sin\angle \mathrm{Q}_n\mathrm{OR}_n$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sin\theta\sin\{(1-n)\pi+2n\theta\}}{\sin\{n\pi-(2n+1)\theta\}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(1-n)\pi\sin2n\theta}{-\cos n\pi\ \sin(2n+1)\theta}\sin\theta$$

$$=\frac{\sin2n\theta\sin\theta}{2\sin(2n+1)\theta}$$

$$=\frac{\sin2n\theta\ \sin\theta}{2(\sin2n\theta\cos\theta+\cos2n\theta\sin\theta)}$$

$$=\frac{\tan2n\theta\tan\theta}{2(\tan2n\theta+\tan\theta)}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$\tan\theta>0$

$\frac{n-1}{2n}\pi<\theta\leqq\frac{n}{2(n+1)}\pi$ より　$(n-1)\pi<2n\theta\leqq\frac{n^2\pi}{n+1}$

$(n-1)\pi<2n\theta\leqq(n-1)\pi+\frac{\pi}{n+1}$

$n\geqq2$ のときは　$0<\frac{\pi}{n+1}<\frac{\pi}{2}$ より　$\tan2n\theta$ は，この範囲で単調増加する。

よって　$\tan(n-1)\pi<\tan2n\theta\leqq\tan\{(n-1)\pi+\frac{\pi}{n+1}\}$

n は自然数だから　$0<\tan2n\theta\leqq\tan\frac{\pi}{n+1}$

$$0<\mathrm{S}_n=\frac{\tan2n\theta\tan\theta}{2(\tan2n\theta+\tan\theta)}<\frac{\tan2n\theta\tan\theta}{2\tan\theta}=\frac{\tan2n\theta}{2}$$

$$0<\mathrm{S}_n<\frac{\tan2n\theta}{2}\leqq\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{n+1}$$

$n\to\infty$ のとき，$\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{n+1}\to0$ となり，$\mathrm{S}_n\to0$

反射の回数 n が限りなく大きくなる場合は，S_n は限りなく 0 に近づく