令和8年度本試験解答

$\boxed{1}$

(1)

(解答)

$\mathrm{P}(x^2)=x^4+ax^2+b$

$\mathrm{P}(x^2)$ を$\mathrm{P}(x)$ で割ったときの

商は, $\mathrm{Q}(x)=x^2-ax+a^2+a-b$

余りは, $\mathrm{R}(x)=-a(a^2+a-2b)x-b(a^2+a-b-1)$ である。

また, $\mathrm{P}(x^2)$ が$\mathrm{P}(x)$ で割り切れるとき, $\mathrm{R}(x)=0$

$-a(a^2+a-2b)=0$ かつ$-b(a^2+a-b-1)=0$

$a\fallingdotseq 0$, $b\fallingdotseq 0$ なので, $a^2+a-2b=0$ …① かつ $a^2+a-b-1=0$ …②

①, ②を解いて, $(a\ ,\ b)=(-2\ ,\ 1)\ ,\ (1\ ,\ 1)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-ax+a^2+a-b \\
\hline
x^2+ax+b & x^4 \qquad +ax^2 \qquad\qquad\qquad +b \\
 & \underline{x^4+ax^3+bx^2} \\
 & \quad -ax^3+(a-b)x^2 \\
 & \quad \underline{-ax^3 \quad -a^2x^2 \qquad -abx} \\
 & \qquad\quad (a^2+a-b)x^2+ \quad abx \\
 & \qquad\quad \underline{(a^2+a-b)x^2+a(a^2+a-b)x+b(a^2+a-b)} \\
 & \qquad\qquad\qquad -a(a^2+a-2b)x-b(a^2+a-b-1)
\end{array}
$$

（2）

（解答）

$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=\gamma(a_n+\alpha n+\beta)$ より

$a_{n+1}=\gamma a_n+(\gamma-1)\alpha n+(\gamma-1)\beta-\alpha$

これが, $a_{n+1}=-a_n+4n$ と一致するから,

$\gamma=-1$,　$(\gamma-1)\alpha=4$,　$(\gamma-1)\beta-\alpha=0$

これらを解いて, $\alpha=-2$, $\beta=1$, $\gamma=-1$

上の結果より, 与式は $a_{n+1}-2(n+1)+1=-(a_n-2n+1)$ と表せる。

数列$\{a_n-2n+1\}$ は, 初項が4, 公比が－1の等比数列である。

よって, $a_n-2n+1=4(-1)^{n-1}$

$a_n=4(-1)^{n-1}+2n-1$

(3)―(A)

(解答)

$z=x+yi$ (x,y は実数)とする。

$|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|\leqq 2$

$|(x+yi)+(x-yi)|+|(x+yi)-(x-yi)|\leqq 2$

$2|x|+2|y|\leqq 2$

$|x|+|y|\leqq 1$

z は4点$1, i, -1, -i$ を頂点とする正方形の周および内部を表す。

点$\mathrm{A}(1+i)$, $\mathrm{P}(z)$ とすると, $|z-1-i|=\mathrm{AP}$

AP の最大値は$\sqrt{5}$　このとき, $z=-1$ または$z=-i$

AP の最小値は$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　このとき$z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

(3)—(B)

(解答)

$a=-1$ のとき, x についての方程式は $-x^2+2x+1=0$

$x^2-2x-1=0$

$x=1\pm\sqrt{2}$ （異なる2つの実数解）

$a=0$ のとき, x についての方程式は $0\cdot x^2+0\cdot x+1=0$

これを満たす解はない。

$a=1$ のとき, x についての方程式は $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$ の重解

したがって, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{1}{6}$

よって X の確率分布は, 下の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

上の表より,

X の平均は,

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

また, X の分散は,

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\left(0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{17}{36}$$

$\boxed{2}$

（解答）

（1） △OAB において余弦定理より，

$b^2=a^2+3^2-2\cdot a\cdot 3\cdot\cos\theta$

$b^2=a^2-6a\cos\theta+9$ ････････①

△OAC において余弦定理より，

$c^2=a^2+2^2-2\cdot a\cdot 2\cdot\cos\theta$

$c^2=a^2-4a\cos\theta+4$ ･･･････②

（2） $\angle\mathrm{OCB}=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$

△OBC において正弦定理より

$$\frac{b}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{c}{\sin\frac{\pi}{4}} \qquad b=\frac{c}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}c$$

(3) $b=\dfrac{\sqrt{6}}{2}c$ より

①を整理して　$3c^2=2a^2-12a\cos\theta+18$ …③

②を整理して　$3c^2=3a^2-12a\cos\theta+12$ ‥‥④

③, ④より　$a^2-6=0$, $a>0$ より　$a=\sqrt{6}$

$\triangle$OAB において正弦定理より

$$\frac{2}{\sin\angle \mathrm{AOC}}=\frac{\sqrt{6}}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\sin\angle \mathrm{AOC}=\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0<\angle \mathrm{AOC}<\dfrac{2}{3}\pi$ より, $\angle \mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{4}$

(4) $\theta=\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{5}{12}\pi$

$\triangle$OAC において余弦定理より,

$$\left(\sqrt{6}\right)^2=c^2+2^2-2\cdot2\cdot c\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

整理して　$c^2-2c-2=0$

$c>0$ より $c=1+\sqrt{3}$

(2)より　$b=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{3}$

（解答）

(1) $f(x)=x^3-(a+b)x^2+abx=x(x-a)(x-b)$　より,

$A(a\,,0)$ ，$B(b\,,0)$

$f'(x)=3x^2-2(a+b)x+ab$ より

$f'(0)=ab$ ，$f'(a)=a^2-ab=a(a-b)$ ，$f'(b)=b^2-ab=b(b-a)$

よって、$l_1:y=abx$

$l_2:y=a(a-b)(x-a)$　より　$l_2:y=a(a-b)x-a^2(a-b)$

$l_3:y=b(b-a)(x-b)$　より　$l_3:\ y=b(b-a)x-b^2(b-a)$

(2) $S_1=\int_0^a\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$　$S_2=\int_a^b-\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$　より

$$S_1-S_2=\int_0^a\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx-\int_a^b-\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$$

$$=\int_0^a\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx+\int_a^b\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$$

$$=\int_0^b\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+b}{3}x^3+\frac{ab}{2}x^2\right]_0^b$$

$$=\frac{1}{4}b^4-\frac{a+b}{3}b^3+\frac{ab}{2}b^2$$

$$=\frac{1}{12}b^3\{3b-4(a+b)+6a\}=\frac{1}{12}b^3(2a-b)$$

（ｉ）$2a-b<0$　つまり$b>2a$　のとき　$S_1<S_2$

（ii）$2a-b=0$　つまり　$b=2a$ のとき　$S_1=S_2$

（iii）$2a-b>0$　つまり　$b<2a$ のとき　$S_1>S_2$

（3）$S_1=S_2$ より $b=2a$

l_1: $y=abx=2a^2x$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・①

l_2: $y=a(a-b)x-a^2(a-b)=-a^2x+a^3$ ・・・・②

l_3: $y=b(b-a)x-b^2(b-a)=2a^2x-4a^3$ ・・・・・③

①，②よりl_1とl_2の交点はD は，

$2a^2x=-a^2x+a^3$

$x=\frac{a}{3}$，$y=\frac{2}{3}a^3$ よって $D(\frac{a}{3},\frac{2a^3}{3})$

②，③よりl_2とl_3の交点はE は，

$-a^2x+a^3=2a^2x-4a^3$

$x=\frac{5a}{3}$，$y=-\frac{2}{3}a^3$ よって $E(\frac{5a}{3},-\frac{2a^3}{3})$

$T=\triangle OBD+\triangle OBE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{2a^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{2a^3}{3}=\frac{4}{3}a^4$

$S_1=\int_0^a(x^3-3ax^2+2a^2x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-ax^3+a^2x^2\right]_0^a=\frac{1}{4}a^4$

$S_2=S_1=\frac{1}{4}a^4$ よって $\frac{S_1+S_2}{T}=\frac{\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{4}a^4}{\frac{4}{3}a^4}=\frac{3}{8}$

（4） $S_1=S_2$ ， $\triangle OBD=\frac{T}{2}$ より$\frac{S_1}{\triangle OBD}=\frac{3}{8}$

よって$\frac{\triangle OBF}{\triangle OBD}=\frac{3}{8}$であればよい。

OB を底辺とみなしたとき高さの比が 8:3 なので，

点F は，線分BD を3:5 に内分する。

よって$F(\frac{11a}{8},\frac{a^3}{4})$

直線m の方程式は $y=\frac{2}{11}a^2x$

$\boxed{4}$

(1)

(解答)

$\mathrm{P}(x^2)=x^4+ax^2+b$

$\mathrm{P}(x^2)$ を $\mathrm{P}(x)$ で割ったときの

商は, $\mathrm{Q}(x)=x^2-ax+a^2+a-b$,

余りは, $\mathrm{R}(x)=-a(a^2+a-2b)x-b(a^2+a-b-1)$ である。

また, $\mathrm{P}(x^2)$ が $\mathrm{P}(x)$ で割り切れるとき, $\mathrm{R}(x)=0$

$-a(a^2+a-2b)=0$ かつ $-b(a^2+a-b-1)=0$

$a\fallingdotseq 0$, $b\fallingdotseq 0$ なので, $a^2+a-2b=0$ …① かつ $a^2+a-b-1=0$ …②

①, ②を解いて, $(a\ ,\ b)=(-2\ ,\ 1)\ ,\ (1\ ,\ 1)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-ax+a^2+a-b \\
\hline
x^2+ax+b & x^4+ax^2+b \\
 & \underline{x^4+ax^3+bx^2} \\
 & -ax^3+(a-b)x^2 \\
 & \underline{-ax^3-a^2x^2-abx} \\
 & (a^2+a-b)x^2+abx \\
 & \underline{(a^2+a-b)x^2+a(a^2+a-b)x+b(a^2+a-b)} \\
 & -a(a^2+a-2b)x-b(a^2+a-b-1)
\end{array}
$$

（2）

（解答）

$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=\gamma(a_n+\alpha n+\beta)$ より

$a_{n+1}=\gamma a_n+(\gamma-1)\alpha n+(\gamma-1)\beta-\alpha$

これが，$a_{n+1}=-a_n+4n$ と一致するから，

$\gamma=-1$，　$(\gamma-1)\alpha=4$，　$(\gamma-1)\beta-\alpha=0$

これらを解いて，$\alpha=-2$，$\beta=1$，$\gamma=-1$

上の結果より，与式は $a_{n+1}-2(n+1)+1=-(a_n-2n+1)$ と表せる。

数列$\{a_n-2n+1\}$ は，初項が4，公比が－1の等比数列である。

よって，$a_n-2n+1=4(-1)^{n-1}$

$a_n=4(-1)^{n-1}+2n-1$

(3)―(A)

(解答)

$z = x + yi$ (x, y は実数)とする。

$|z + \overline{z}| + |z - \overline{z}| \leqq 2$

$|(x + yi) + (x - yi)| + |(x + yi) - (x - yi)| \leqq 2$

$2|x| + 2|y| \leqq 2$

$|x| + |y| \leqq 1$

z は4点$1, i, -1, -i$ を頂点とする正方形の周および内部を表す。

点$\mathrm{A}(1+i)$, $\mathrm{P}(z)$ とすると, $|z - 1 - i| = \mathrm{AP}$

AP の最大値は$\sqrt{5}$　このとき, $z = -1$ または$z = -i$

AP の最小値は$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　このとき$z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

(3)―(B)

(解答)

$a=-1$ のとき, x についての方程式は $-x^2+2x+1=0$

$x^2-2x-1=0$

$x=1\pm\sqrt{2}$ (異なる2つの実数解)

$a=0$ のとき, x についての方程式は $0\cdot x^2+0\cdot x+1=0$

これを満たす解はない。

$a=1$ のとき, x についての方程式は $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$ の重解

したがって, $P(X=0)=\frac{1}{3}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{1}{6}$

よって X の確率分布は, 下の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

上の表より, X の平均は,

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

また, X の分散は,

$$V(X)=\left(0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{17}{36}$$

$\boxed{5}$

(1)

(解答)

$$y=\frac{x-3}{x^2-2x+6}$$

分母$=x^2-2x+6=(x-1)^2+5>0$

y はすべての実数x で定義され連続である。

$$y'=\frac{1\cdot(x^2-2x+6)-(x-3)(2x-2)}{(x^2-2x+6)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x+6-2x^2+8x-6}{(x^2-2x+6)^2}$$

$$=\frac{-x^2+6x}{(x^2-2x+6)^2}$$

$$=\frac{-x(x-6)}{(x^2-2x+6)^2}$$

$y'=0$ は$x=0$,$x=6$

増減表は

x		0		6	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{10}$	$\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} y=-0$, $\lim_{x\to\infty} y=+0$

最大値 $\frac{1}{10}$ ($x=6$)

最小値 $-\frac{1}{2}$ ($x=0$)

（2）

（解答）　$x<0$ のとき, $e^{x}<1$

$$|e^{x}-1|=1-e^{x}$$

$x\geqq 0$ のとき, $e^{x}\geqq 1$

$$|e^{x}-1|=e^{x}-1$$

$$\int_{1-a}^{1+a}|e^{x}-1|\,dx=\int_{1-a}^{0}|e^{x}-1|\,dx+\int_{0}^{1+a}|e^{x}-1|\,dx$$

$$=\int_{1-a}^{0}(1-e^{x})\,dx+\int_{0}^{1+a}(e^{x}-1)dx$$

$$=[x-e^{x}]_{1-a}^{0}+[e^{x}-x]_{0}^{1+a}$$

$$=-1-(1-a-e^{1-a})+(e^{1+a}-1-a)-1$$

$$=e^{1+a}+e^{1-a}-4$$

$f(a)=e^{1+a}+e^{1-a}-4$ とおく。

$f'(a)=e^{1+a}-e^{1-a}$

$a\geqq 1$ より$e^{1+a}>e^{1-a}$

$f'(a)>0$

$f(a)$ は単調に増加する。

$\lim_{a\to\infty}f(a)=\infty$

$f(a)\geqq f(1)=e^{2}+e^{0}-4=e^{2}-3$

$$\int_{1-a}^{1+a}|e^{x}-1|\,dx\geqq e^{2}-3$$

（3）

（解答）

$n=1$ のとき　，　　左辺$=(\sin x)^{(1)}=\cos x$

右辺$=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\sin x\cos\frac{\pi}{2}+\cos x\sin\frac{\pi}{2}=\cos x$

左辺=右辺で成り立つ。

$n=k$ のとき,$(\sin x)^{(k)}=\sin(x+\frac{k\pi}{2})$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき,左辺$=(\sin x)^{(k+1)}=\frac{d}{dx}(\sin x)^{(k)}=\frac{d}{dx}\{\sin(x+\frac{k\pi}{2})\}$

$=\cos(x+\frac{k\pi}{2})\cdot(x+\frac{k\pi}{2})'=\cos(x+\frac{k\pi}{2})$

右辺$=\sin(x+\frac{(k+1)\pi}{2})=\sin\{(x+\frac{k\pi}{2})+\frac{\pi}{2}\}$

$=\sin(x+\frac{k\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2}+\cos(x+\frac{k\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2}$

$=\cos(x+\frac{k\pi}{2})$

よって左辺=右辺

全ての自然数n に対して$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ が成り立つ。

$(\sin x)^{(n+4)}=\sin(x+\frac{n+4}{2}\pi)=\sin(x+\frac{n\pi}{2}+2\pi)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})=(\sin x)^{(n)}$

よって$(\sin x)^{(n)}=(\sin x)^{(n+4)}$ が成り立つ。

$\boxed{6}$

（解答）

（1）$f(x)=x^3-(a+b)x^2+abx=x(x-a)(x-b)$　より，

A$(a\,,0)$ ，B$(b\,,0)$

$f'(x)=3x^2-2(a+b)x+ab$ より

$f'(0)=ab$ ，$f'(a)=a^2-ab=a(a-b)$ ，$f'(b)=b^2-ab=b(b-a)$

よって、$l_1 : y=abx$

$l_2 : y=a(a-b)(x-a)$　　$y=a(a-b)x-a^2(a-b)$

$l_3 : y=b(b-a)(x-b)$　　$y=b(b-a)x-b^2(b-a)$

（2）$\mathrm{S}_1=\int_0^a\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$　$\mathrm{S}_2=\int_a^b-\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$　より

$$\mathrm{S}_1-\mathrm{S}_2=\int_0^a\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx-\int_a^b-\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$$

$$=\int_0^a\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx+\int_a^b\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$$

$$=\int_0^b\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+b}{3}x^3+\frac{ab}{2}x^2\right]_0^b$$

$$=\frac{1}{4}b^4-\frac{a+b}{3}b^3+\frac{ab}{2}b^2$$

$$=\frac{1}{12}b^3\{3b-4(a+b)+6a\}=\frac{1}{12}b^3(2a-b)$$

（ｉ）$2a-b<0$　つまり$b>2a$　のとき　$\mathrm{S}_1<\mathrm{S}_2$

（ii）$2a-b=0$　つまり $b=2a$ のとき　$\mathrm{S}_1=\mathrm{S}_2$

（iii）$2a-b>0$　つまり $b<2a$ のとき　$\mathrm{S}_1>\mathrm{S}_2$

(3) $\mathrm{S}_1=\mathrm{S}_2$ より $b=2a$

l_1: $y=abx=2a^2x$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・①

l_2: $y=a(a-b)x-a^2(a-b)=-a^2x+a^3$ ・・・・②

l_3: $y=b(b-a)x-b^2(b-a)=2a^2x-4a^3$ ・・・・・③

①, ②よりl_1とl_2の交点はD は,

$2a^2x=-a^2x+a^3$

$x=\dfrac{a}{3}$, $y=\dfrac{2}{3}a^3$ よって $\mathrm{D}(\dfrac{a}{3},\dfrac{2a^3}{3})$

②, ③よりl_2とl_3の交点はE は,

$-a^2x+a^3=2a^2x-4a^3$

$x=\dfrac{5a}{3}$, $y=-\dfrac{2}{3}a^3$ よって $\mathrm{E}(\dfrac{5a}{3},-\dfrac{2a^3}{3})$

$\mathrm{T}=\triangle\mathrm{OBD}+\triangle\mathrm{OBE}=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot\dfrac{2a^3}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot\dfrac{2a^3}{3}=\dfrac{4}{3}a^4$

$\mathrm{S}_1=\displaystyle\int_0^a(x^3-3ax^2+2a^2x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-ax^3+a^2x^2\right]_0^a=\frac{1}{4}a^4$

$\mathrm{S}_2=\mathrm{S}_1=\dfrac{1}{4}a^4$ よって $\dfrac{\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2}{\mathrm{T}}=\dfrac{\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{4}a^4}{\frac{4}{3}a^4}=\dfrac{3}{8}$

(4) $\mathrm{S}_1=\mathrm{S}_2$, $\triangle\mathrm{OBD}=\dfrac{\mathrm{T}}{2}$ より$\dfrac{\mathrm{S}_1}{\triangle\mathrm{OBD}}=\dfrac{3}{8}$

よって$\dfrac{\triangle\mathrm{OBF}}{\triangle\mathrm{OBD}}=\dfrac{3}{8}$であればよい。

OB を底辺とみなしたとき高さの比が 8:3 なので,

点F は, 線分BD を3:5 に内分する。

よって$\mathrm{F}(\dfrac{11a}{8},\dfrac{a^3}{4})$

直線m の方程式は $y=\dfrac{2}{11}a^2x$

$\boxed{7}$

（解答）

(1) $\mathrm{DA}=\mathrm{DB}=\mathrm{DC}$ より $\mathrm{DA}^2=\mathrm{DB}^2=\mathrm{DC}^2$

$\mathrm{DA}^2=(0-2)^2+(0-1)^2+(1-3)^2=9$ …………①

$\mathrm{DB}^2=(0-2)^2+(0-2)^2+(1-a)^2=a^2-2a+9$ …………②

$\mathrm{DC}^2=(0-1)^2+(0-2)^2+(1-b)^2=b^2-2b+6$ …………③

①② より

$a^2-2a=0$

$a>0$ より $a=2$

①③ より

$b^2-2b-3=0$

$(b-3)(b+1)=0$

$b>0$ より $b=3$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,2,2)-(2,1,3)=(0,1,-1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,2,3)-(2,1,3)=(-1,1,0)$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,0,1)-(2,1,3)=(-2,-1,-2)$

$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$=s(0,1,-1)+t(-1,1,0)-(-2,-1,-2)=(-t+2,s+t+1,-s+2)$

（3）$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0+(s+t+1)-(-s+2)=2s+t-1=0$ ・・・・・①

$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-(-t+2)+(s+t+1)+0=s+2t-1=0$ ・・・②

よって①　②より $s=\dfrac{1}{3},\ t=\dfrac{1}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3}\right)$

（4）$|\overrightarrow{\mathrm{DH}}|=\sqrt{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(\dfrac{5}{3}\right)^2}=\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$

球S の中心D を原点に，直線DH を x 軸と重なるように移動する。

移動した球は、$x^2+y^2+z^2=9$ で表される。

また平面T は，平面 $x=\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$ として表される。

球の全体の体積は　$\mathrm{V}=\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2=\dfrac{4}{3}\pi\cdot3^3=36\pi$ である。

$$\mathrm{V}_1=\frac{1}{2}\cdot36\pi+\pi\int_0^{\frac{5\sqrt{3}}{3}}y^2dx=18\pi+\pi\int_0^{\frac{5\sqrt{3}}{3}}(9-x^2)dx$$

$$=18\pi+\pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{5\sqrt{3}}{3}}=18\pi+\pi\left(15\sqrt{3}-\frac{125\sqrt{3}}{27}\right)$$

$$=\left(18+\frac{280\sqrt{3}}{27}\right)\pi$$

$$\mathrm{V}_2=\mathrm{V}-\mathrm{V}_1=36\pi-\left(18\pi+\frac{280\sqrt{3}}{27}\pi\right)=\left(18-\frac{280\sqrt{3}}{27}\right)\pi$$

$\boxed{8}$

（解答）

（1）$\mathrm{P}(x^2)=x^4+ax^2+b$

$\mathrm{P}(x^2)$ を$\mathrm{P}(x)$ で割ったときの

商は，$\mathrm{Q}(x)=x^2-ax+a^2+a-b$ ，

余りは，$\mathrm{R}(x)=-a(a^2+a-2b)x-b(a^2+a-b-1)$ である。

また，$\mathrm{P}(x^2)$ が$\mathrm{P}(x)$ で割り切れるとき，$\mathrm{R}(x)=0$

$-a(a^2+a-2b)=0$ かつ$-b(a^2+a-b-1)=0$

$a\fallingdotseq 0$, $b\fallingdotseq 0$ なので，$a^2+a-2b=0$ …① かつ $a^2+a-b-1=0$ …②

①, ②を解いて，$(a\,,\,b)=(-2\,,\,1)\,,\,(1\,,\,1)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-ax+a^2+a-b \\
\cline{2-2}
x^2+ax+b & x^4 \qquad +ax^2 \qquad\qquad\qquad +b \\
 & \underline{x^4+ax^3+bx^2} \\
 & \quad -ax^3+(a-b)x^2 \\
 & \quad \underline{-ax^3 \quad -a^2x^2 \qquad -abx} \\
 & \qquad (a^2+a-b)x^2+ \quad abx \\
 & \qquad \underline{(a^2+a-b)x^2+a(a^2+a-b)x+b(a^2+a-b)} \\
 & \qquad\qquad -a(a^2+a-2b)x-b(a^2+a-b-1)
\end{array}
$$

（2）

（解答）

$x<0$ のとき, $e^x<1$

$$|e^x-1|=1-e^x$$

$x\geqq 0$ のとき, $e^x\geqq 1$

$$|e^x-1|=e^x-1$$

$$\int_{1-a}^{1+a}|e^x-1|\,dx=\int_{1-a}^{0}|e^x-1|\,dx+\int_{0}^{1+a}|e^x-1|\,dx$$

$$=\int_{1-a}^{0}(1-e^x)\,dx+\int_{0}^{1+a}(e^x-1)dx$$

$$=[x-e^x]_{1-a}^{0}+[e^x-x]_{0}^{1+a}$$

$$=-1-(1-a-e^{1-a})+(e^{1+a}-1-a)-1$$

$$=e^{1+a}+e^{1-a}-4$$

$f(a)=e^{1+a}+e^{1-a}-4$ とおく。

$f'(a)=e^{1+a}-e^{1-a}$

$a\geqq 1$ より$e^{1+a}>e^{1-a}$

$f'(a)>0$

$f(a)$ は単調に増加する。

$\lim_{a\to\infty}f(a)=\infty$

$f(a)\geqq f(1)=e^2+e^0-4=e^2-3$

$$\int_{1-a}^{1+a}|e^x-1|\,dx\geqq e^2-3$$

(3)—(A)

(解答)

$n=1$ のとき ,　　左辺$=(\sin x)^{(1)}=\cos x$

右辺$=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\sin x\cos\frac{\pi}{2}+\cos x\sin\frac{\pi}{2}=\cos x$

左辺=右辺で成り立つ。

$n=k$ のとき,$(\sin x)^{(k)}=\sin(x+\frac{k\pi}{2})$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき,左辺$=(\sin x)^{(k+1)}=\frac{d}{dx}(\sin x)^{(k)}=\frac{d}{dx}\{\sin(x+\frac{k\pi}{2})\}$

$=\cos(x+\frac{k\pi}{2})\cdot(x+\frac{k\pi}{2})'=\cos(x+\frac{k\pi}{2})$

右辺$=\sin(x+\frac{(k+1)\pi}{2})=\sin\{(x+\frac{k\pi}{2})+\frac{\pi}{2}\}$

$=\sin(x+\frac{k\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2}+\cos(x+\frac{k\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2}$

$=\cos(x+\frac{k\pi}{2})$

よって左辺=右辺

全ての自然数n に対して$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ が成り立つ。

$(\sin x)^{(n+4)}=\sin(x+\frac{n+4}{2}\pi)=\sin(x+\frac{n\pi}{2}+2\pi)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})=(\sin x)^{(n)}$

よって$(\sin x)^{(n)}=(\sin x)^{(n+4)}$ が成り立つ。

(3)－(B)

(解答)

$a=-1$ のとき, x についての方程式は $-x^2+2x+1=0$

$x^2-2x-1=0$

$x=1\pm\sqrt{2}$ （異なる2つの実数解）

$a=0$ のとき, x についての方程式は$0\cdot x^2+0\cdot x+1=0$

これを満たす解はない。

$a=1$ のとき, x についての方程式は $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$ の 重解

したがって, $P(X=0)=\frac{1}{3}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{1}{6}$

よって X の確率分布は, 下の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

上の表より, X の平均は,

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

また, X の分散は,

$$V(X)=\left(0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{17}{36}$$

$\boxed{9}$

（解答）

(1) $f(x)=x^3-(a+b)x^2+abx=x(x-a)(x-b)$　より，

$A(a\,,0)$ ，$B(b\,,0)$

$f'(x)=3x^2-2(a+b)x+ab$ より

$f'(0)=ab$ ，$f'(a)=a^2-ab=a(a-b)$ ，$f'(b)=b^2-ab=b(b-a)$

よって、$l_1 : y=abx$

$l_2 : y=a(a-b)(x-a)$　　$y=a(a-b)x-a^2(a-b)$

$l_3 : y=b(b-a)(x-b)$　　$y=b(b-a)x-b^2(b-a)$

(2) $S_1=\int_0^a\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$　$S_2=\int_a^b-\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$　より

$$S_1-S_2=\int_0^a\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx-\int_a^b-\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$$

$$=\int_0^a\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx+\int_a^b\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$$

$$=\int_0^b\{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+b}{3}x^3+\frac{ab}{2}x^2\right]_0^b$$

$$=\frac{1}{4}b^4-\frac{a+b}{3}b^3+\frac{ab}{2}b^2$$

$$=\frac{1}{12}b^3\{3b-4(a+b)+6a\}=\frac{1}{12}b^3(2a-b)$$

（ⅰ）$2a-b<0$　つまり$b>2a$　のとき　$S_1<S_2$

（ⅱ）$2a-b=0$　つまり $b=2a$ のとき　$S_1=S_2$

（ⅲ）$2a-b>0$　つまり $b<2a$ のとき　$S_1>S_2$

(3) $S_1=S_2$ より $b=2a$

l_1: $y=abx=2a^2x$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・①

l_2: $y=a(a-b)x-a^2(a-b)=-a^2x+a^3$ ・・・・②

l_3: $y=b(b-a)x-b^2(b-a)=2a^2x-4a^3$ ・・・・・③

①, ②よりl_1とl_2の交点はD は,

$2a^2x=-a^2x+a^3$

$x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{2}{3}a^3$　　よって　$D(\frac{a}{3},\frac{2a^3}{3})$

②, ③よりl_2とl_3の交点はE は,

$-a^2x+a^3=2a^2x-4a^3$

$x=\frac{5a}{3}$, $y=-\frac{2}{3}a^3$　　よって　$E(\frac{5a}{3},-\frac{2a^3}{3})$

$T=\triangle OBD+\triangle OBE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{2a^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{2a^3}{3}=\frac{4}{3}a^4$

$S_1=\int_0^a(x^3-3ax^2+2a^2x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-ax^3+a^2x^2\right]_0^a=\frac{1}{4}a^4$

$S_2=S_1=\frac{1}{4}a^4$　　よって　$\frac{S_1+S_2}{T}=\frac{\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{4}a^4}{\frac{4}{3}a^4}=\frac{3}{8}$

(4)　$S_1=S_2$ ，　$\triangle OBD=\frac{T}{2}$　より$\frac{S_1}{\triangle OBD}=\frac{3}{8}$

よって$\frac{\triangle OBF}{\triangle OBD}=\frac{3}{8}$であればよい。

OB を底辺とみなしたとき高さの比が 8:3 なので,

点F は, 線分BD を3:5 に内分する。

よって$F(\frac{11a}{8},\frac{a^3}{4})$

直線m の方程式は　$y=\frac{2}{11}a^2x$

$\boxed{10}$

（解答）

（1）$f(x)=8x^3-6x+1$ より　$f'(x)=24x^2-6=6(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$ は, $x=\pm\dfrac{1}{2}$ の時である。

$f(x)$ の増減は, 以下の増減表のとおりである。

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値は$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3$, 極小値は$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$

$f(x)$ はすべての実数に対して連続であり,

$f(-1)=-1<0$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3>0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$, $f(1)=3>0$

$f(x)=0$ は, 区間 $-1<x<-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}<x<1$ にそれぞれ1個の実数解を持つ。

すなわち, $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$, $|\gamma|<1$ が成り立つ。

（2）①の実数解がα , β , γ なので, $8x^3-6x+1=8(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ とおける

右辺$=8\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}$

$=8x^3-8(\alpha+\beta+\gamma)x^2+8(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-8\alpha\beta\gamma$　より

$-8(\alpha+\beta+\gamma)=0$, $8(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-6$, $-8\alpha\beta\gamma=1$

よって　$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\dfrac{3}{4}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{1}{8}$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=0-2(-\dfrac{3}{4})=\dfrac{3}{2}$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=0+3(-\dfrac{1}{8})=-\dfrac{3}{8}$

(3)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{a_k+b_k+c_k\}=\sum_{k=1}^{n}\alpha^k+\sum_{k=1}^{n}\beta^k+\sum_{k=1}^{n}\gamma^k$

$$=\frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}+\frac{\beta(1-\beta^n)}{1-\beta}+\frac{\gamma(1-\gamma^n)}{1-\gamma}$$

$|\alpha|<1$, $|\beta|<1$, $|\gamma|<1$ なので, S_n は収束する。

よって $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\beta}+\frac{\gamma}{1-\gamma}$

$$=\frac{\alpha(1-\beta)(1-\gamma)+\beta(1-\gamma)(1-\alpha)+\gamma(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma}{1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma}$$

$$=\frac{0-2(-\frac{3}{4})+3(-\frac{1}{8})}{1-0+(-\frac{3}{4})-(-\frac{1}{8})}$$

$$=\frac{12-3}{8-6+1}=\frac{9}{3}=3$$

(4)　$g(p)=\overline{AP}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{CP}=|p-\alpha||p-\beta||p-\gamma|$

$f(x)=0$ の解はα,β,γ　より

$f(x)=8(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$　である。

$|f(x)|=8|x-\alpha||x-\beta||x-\gamma|$　より$|f(p)|=8|p-\alpha||p-\beta||p-\gamma|$

$g(p)=\frac{1}{8}|f(p)|$

$-1\leqq p\leqq 1$ における$g(p)$ の増減表は, (1)の増減表と$\alpha<\beta<\gamma$ より

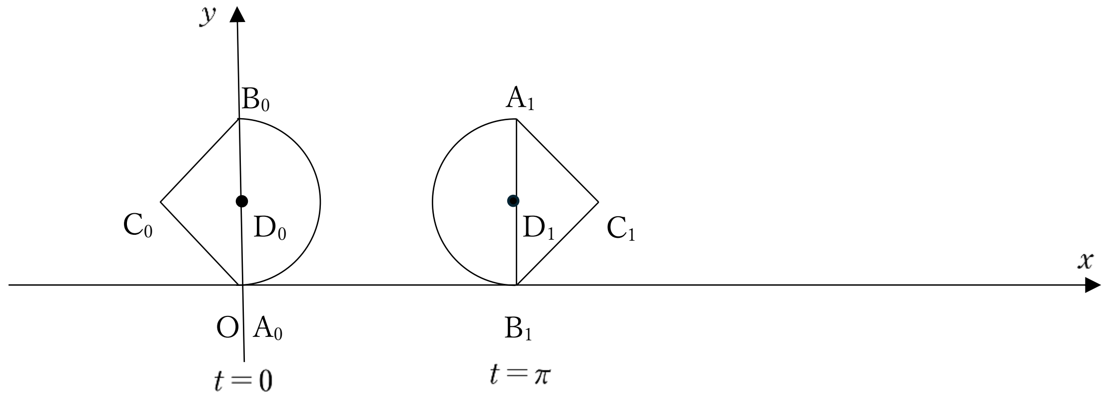
p	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		β		$\frac{1}{2}$		γ		1
$g(p)$	$\frac{1}{8}$	↘	0	↗	$\frac{3}{8}$	↘	$\frac{1}{8}$	↘	0	↗	$\frac{1}{8}$	↘	0	↗	$\frac{3}{8}$

よって　$-1\leqq p\leqq 1$ より　$0\leqq g(p)\leqq\frac{3}{8}$

$\boxed{11}$

（解答）

（1）



$A(x,y)$ の座標は、 $x=\theta-\sin\theta$， $y=1-\cos\theta$

$D(x,y)$ の座標は、 $x=\theta$， $y=1$

D は線分AB の中点なので、

$B(x,y)$ は $\dfrac{x+\theta-\sin\theta}{2}=\theta$ ， $\dfrac{y+1-\cos\theta}{2}=1$ が成り立つ。

よって
$$\begin{aligned} x&=2\theta-\theta+\sin\theta \\ &=\theta+\sin\theta \\ y&=2-1+\cos\theta \\ &=1+\cos\theta \end{aligned}$$

$B(\theta+\sin\theta, 1+\cos\theta)$

$\theta=\pi$ のとき

$A_1(\pi , 2)$, $B_1(\pi , 0)$, $C_1(\pi+1 , 1)$, $D_1(\pi , 1)$

（2）l_1 の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

l_2 の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}$ より

l_1 と l_2 の傾きの積は $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\left(\dfrac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)=-\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=-1$

よって l_1 と l_2 は垂直に交わる。

（3） l_1 と l_2 の交点は

l_1 の式が $y=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}(x-\theta+\sin\theta)+1-\cos\theta=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}(x-\theta-\sin\theta)+1-\cos\theta$

l_2 の式が $y=\dfrac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}(x-\theta-\sin\theta)+1+\cos\theta=-\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}(x-\theta-\sin\theta)+1+\cos\theta$

交点は,

$\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}(x-\theta+\sin\theta)+1-\cos\theta=-\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}(x-\theta-\sin\theta)+1+\cos\theta$ より

$(1+\cos\theta)(x-\theta+\sin\theta)-\sin\theta\cos\theta=-(1-\cos\theta)(x-\theta-\sin\theta)+\sin\theta\cos\theta$

$(1+\cos\theta+1-\cos\theta)x=(1-\cos\theta)(\theta+\sin\theta)+(1+\cos\theta)(\theta-\sin\theta)+2\sin\theta\cos\theta$

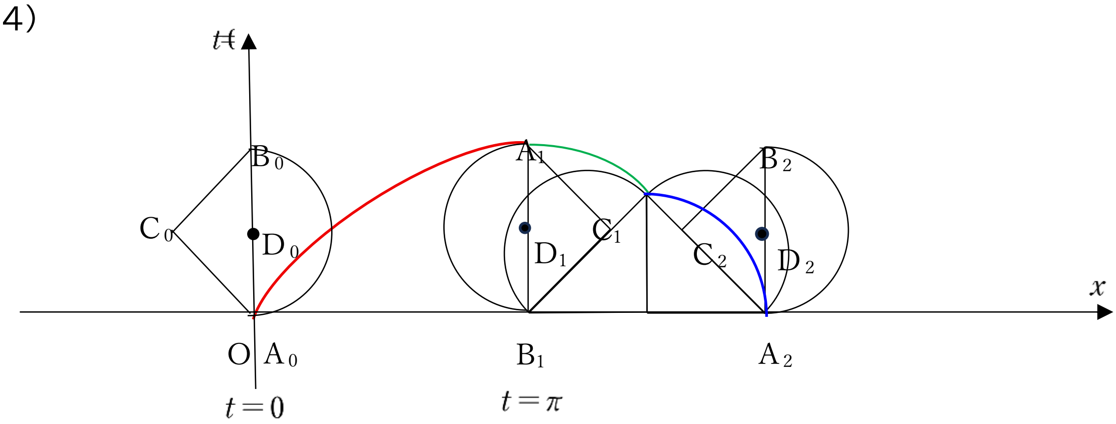
$2x=2\theta$ より $x=\theta$

このとき, $y=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}(\theta-\theta+\sin\theta)+1-\cos\theta$

$\qquad=1+\cos\theta+1-\cos\theta=2$

よって, l_1 と l_2 の交点 P は直線 $y=2$ $(0<x<\pi)$ 上にある。

(4)



$B_1A_2=2B_0C_0=2\sqrt{2}$ より，$A_0A_2=\pi+2\sqrt{2}$

よって　$A_2\left(\pi+2\sqrt{2},0\right)$，$B_2\left(\pi+2\sqrt{2},2\right)$，$C_2\left(\pi+2\sqrt{2}-1,1\right)$，$D_2\left(\pi+2\sqrt{2},1\right)$

曲線J は，サイクロイド曲線と半径2，中心角$\frac{\pi}{4}$ の円弧と半径$\sqrt{2}$，中心角$\frac{\pi}{2}$ の円弧をえがく。

$S_1=\int_0^{\pi} y\,dx$

ここで　$y=1-\cos\theta$，　$x=\theta-\sin\theta$ より

$\frac{dy}{d\theta}=1-\cos\theta$　，$0\leqq x\leqq\pi$ のとき　$0\leqq\theta\leqq\pi$ が対応するので

$$S_1=\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\pi}=\frac{3\pi}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot2^2+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\pi}{2}+1$$

$$S_3=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2=\frac{\pi}{2}$$

$$S=S_1+S_2+S_3=1+\frac{5}{2}\pi$$