

令和8年度 長崎大学オープンキャンパス 数学出題意図解説セミナー

長崎大学教育開発推進機構
アドミッションセンター



長崎大学
NAGASAKI UNIVERSITY

本日の講義内容

- I 長崎大学の一般入試(数学)の概要(令和8年度入試の形式)
- II 出題の方針と答案作成のアドバイス
- III 長崎大学の公式の取り扱い
- IV 過去4年間の試験で多く見られた誤答例
- V これからの勉強で大切にしてほしいこと
 - ①授業を大切にする
 - ②様々な解答を考える
 - ③日常の事象を数学的に探究する

最後に 生徒の皆さんへ

I 長崎大学の一般入試(数学)の概要

令和8年度入試の形式

型	志 望 学 部	問 題 の 番 号
I	教 育 学 部 A 経 済 学 部 環 境 科 学 部	1 3
II	水 産 学 部 情 報 デ ー タ 科 学 部 A	1 2 3
III	教 育 学 部 B 薬 学 部 歯 学 部 工 学 部 情 報 デ ー タ 科 学 部 B	4 5 6 7
IV	医 学 部	8 9 10 11

I 型	教育(文系)・経済・環境の学部・・・80分間(2問) 1 小問(4題) 3 大問
II 型	水産・情報(文系)の学部 ……110分間(3問) 1 小問(4題) 2 大問 3 大問
III 型	医学部を除く理系学部……………130分間(4問) 4 小問(3題) 5 小問(3題) 6 大問 7 大問
IV 型	医学部……………130分間(4問) 8 小問(3題) 9 大問 10 大問 11 大問

統計的推測の分野の出題

- ・小問題として出題
- ・文系は、数学C(平面上の曲線と複素数平面の分野)との選択で出題
- ・理系は、選択分野を特定せず全分野でとの選択で出題

Ⅱ 出題の方針と答案作成のアドバイス

◇出題の方針

- ①高校の授業の延長上になるような良質の問題を出題する。
(普段の授業を大切にしましょう)
- ②出題範囲が偏らないようオムニバス(小問)を出題する。
(苦手な分野を作らないようにしましょう)
- ③学力が適切に測れるよう段階的に設問を設けて出題する。
(基本的な設問は確実に解けるようにしましょう)
- ④単なる知識・技能を問うだけではなく思考力・判断力・表現力を問う問題を出題する。
(論理を進めるときは根拠を明確にしましょう)

◇答案作成のアドバイス

①解答用紙の記入欄のミスや選択問題の選択ミスは絶対にしない

(注意事項をしっかりと読んでミスがないよう注意しましょう)

②できるだけ詳しく丁寧に書く

(文字が乱雑で解読不明の答案や行間が説明不足で、論理の展開が不明な解答にならないようできるだけ詳しく丁寧に解答しましょう)

③公式は上手に使う

(教科書にある公式は使用してもよいですが、その際は、その公式の名前などを紹介しながら解答しましょう)

④試験時間の最後まで全力を尽くす

(大問の設問(1)(2)は比較的基本問題が多いので確実に解くようにしましょう。
また設問間の関連性も見逃さないようにしましょう)

Ⅲ 長崎大学の公式の取り扱い

(1) 教科書に載っている基本的な定理や公式

①余弦定理・正弦定理

②点と直線の距離の公式

(答案には、公式の名称や内容を記す方が好ましい)

(答案例①)

三角形ABCで $AB=4$, $BC=2$, $CA=3$ のとき, $\cos A$ を求めよ。

$\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

(答案例②)

点 $A(1,2)$ から直線 $l: 2x - 3y + 1 = 0$ までの距離 d を求めよ。

点と直線の距離の公式より

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

(2) 教科書に載っている準公式

① 2つのベクトルが作る三角形の面積の公式

② 直線と放物線で囲まれる図形の面積の公式

(答案には、公式の名称か内容を書いた方が好ましい)

(答案例③)

3点A(1,1), B(4,3), C(5,4) のとき, 三角形ABC の面積S をベクトルを利用して求めよ。

$$\overrightarrow{AB} = (4,3) - (1,1) = (3,2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (5,4) - (1,1) = (4,3)$$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で作る三角形の面積S は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \text{ なので}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(3^2 + 2^2)(4^2 + 3^2) - (3 \cdot 4 + 2 \cdot 3)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{13 \cdot 25 - 18^2} = \frac{1}{2}$$

(答案例④)

直線 $l: y = x + 2$ と放物線 $C: y = x^2$ とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

直線と放物線の交点の x 座標は, $x = -1, x = 2$ である。

$-1 \leq x \leq 2$ において $x + 2 \geq x^2$ だから

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx \\ &= - \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx \\ &= - \int_{-1}^2 (x + 1)(x - 2) dx \\ &= - \left\{ (-1) \frac{(2 - (-1))^3}{6} \right\} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\text{公式 } \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

面積の公式として使用せず、式計算として活用する

(3) 教科書に載っていない特殊な公式

- ①ロピタルの定理
- ②バームクーヘンの公式
- ③斜軸の回転体の体積の公式
- ④極線の公式
- ⑤放物線と2接線の面積の公式
- ⑥3次関数と x 軸で囲まれる図形の面積の公式

(解答には、特殊な公式はできるだけ避けてください。

ただし、公式を使う比重が問題の本質から離れて大きく影響しないと
考えられるときは、公式の名称や内容を記すとよいでしょう。)

(答案例⑤)

$y = \frac{x}{e^x}$ のグラフを描け。

$$y' = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

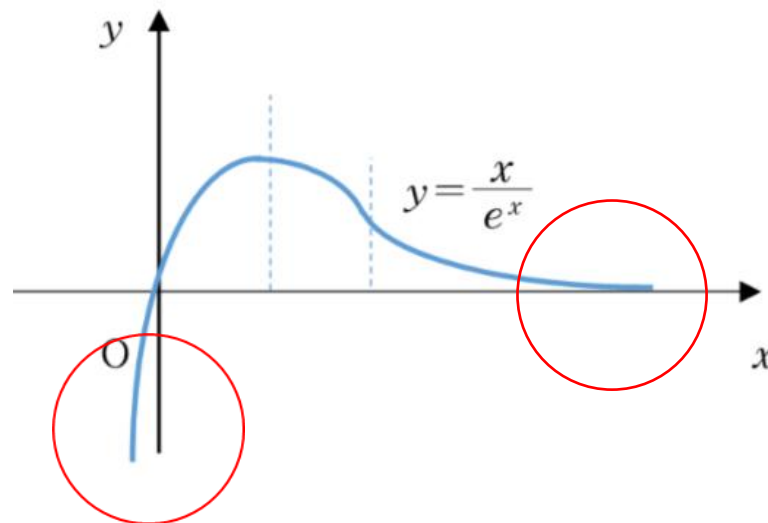
$$y'' = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x}$$

増減表は

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	-	-	
y''		-	-	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\frac{2}{e^2}$	$\searrow$	$+0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad (\text{ロピタルの定理より})$$



長崎大学では、学習指導要領を超えない出題を心掛けています。

例えば、このような例題では、 $x > 0$ のとき $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$

であることを示して事前に $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ を問うようにしています。

Ⅳ 過去4年間の試験で多く見られた誤答例

(Ⅰ) Σ の計算 (R5.2.25)

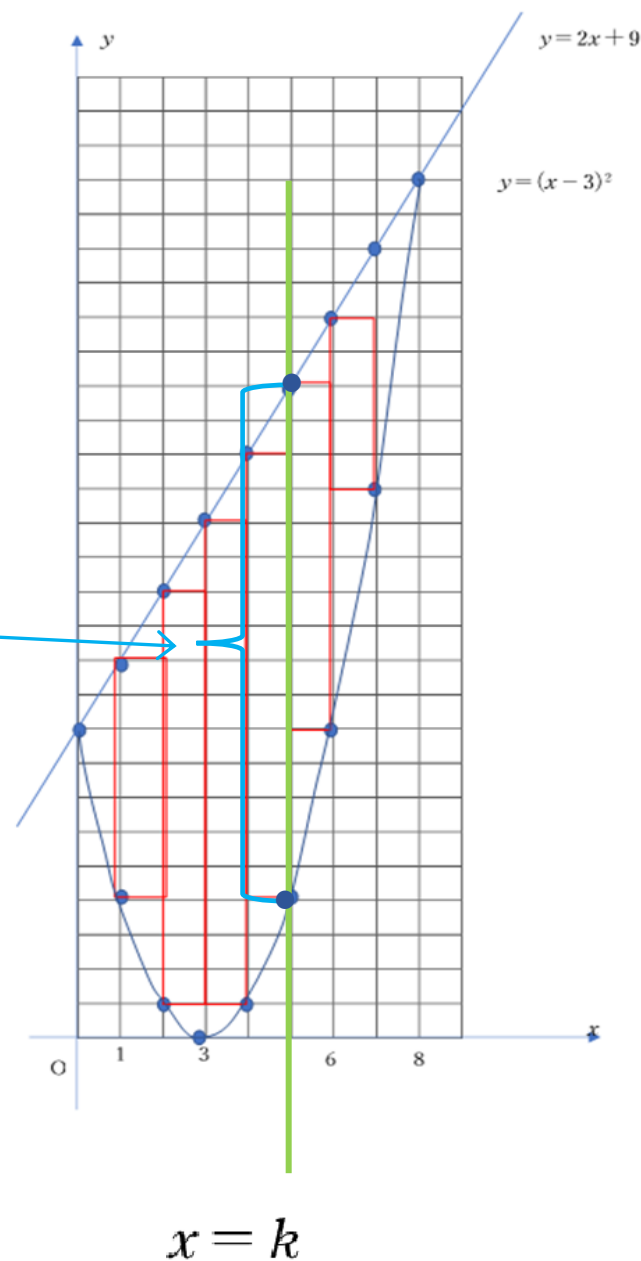
□ (1) 放物線 $C: y = (x - 3)^2$ と直線 $l: y = 2x + 9$ で囲まれる図形 F に含まれる格子点の個数 N を求めよ。

放物線と直線の交点は, $x = 0, x = 8$

直線 $x = k$ 上にある格子点の数 a_k (k は整数) は,

$$a_k = \{(2k + 9) - (k - 3)^2\} + 1 = -k^2 + 8k + 1$$

$$N = \sum_{k=0}^8 a_k = \sum_{k=0}^8 (-k^2 + 8k + 1) = -\frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 8 \frac{8 \cdot 9}{2} + 8 = 92 \quad (\equiv \text{ス})$$



$$N = \sum_{k=0}^8 a_k = \sum_{k=0}^8 (-k^2 + 8k + 1) = -\frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 8 \frac{8 \cdot 9}{2} + \underline{8} = 92 \quad (\text{≠})$$

$$N = \sum_{k=0}^8 a_k = \sum_{k=0}^8 (-k^2 + 8k + 1) = -\frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 8 \frac{8 \cdot 9}{2} + \underline{9} = 93 \quad (\text{正解})$$

$$\sum_{k=0}^8 k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + 8^2$$

$$= 1^2 + 2^2 + \cdots + 8^2$$

$$= \sum_{k=1}^8 k^2$$

$$\sum_{k=0}^8 k = 0 + 1 + 2 + \cdots + 8$$

$$= 1 + 2 + \cdots + 8$$

$$= \sum_{k=1}^8 k$$

$$\sum_{k=0}^8 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{9 \text{ 個}} = 9$$

Σの計算は注意しながら解こう

(2) 数列の一般項 (R 7.2.25)

□ (2) 数列 $\{a_n\}$ が、 $a_1=1, a_2=4, a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$ ($n \geq 1$) で定義されている。
一般項 a_n を求めよ。

$$a_1=1, a_2=4, a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0 \quad (n \geq 1) \text{ より,}$$

$$a_3=12, a_4=32$$

よって $a_n = n \cdot 2^{n-1}$ である。(不十分)

答えを予想した場合は、その予想が正しいことを数学的帰納法などで証明しよう

ここで問題です。

数列 $\{a_n\}: 1, 2, 3, 4, \bigcirc, \dots$ がある。 $\bigcirc$ にはどんな数字が入るか。

$\bigcirc=5$ $\leftarrow$ 他には？

一般項を $a_n = n$ と定めれば, $a_5 = 5$ であるが...

$\bigcirc=100$ $\leftarrow$!!! ???

一般項を $a_n = \frac{95}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + n$ と定めれば, $a_5 = 100$

ここで問題です。

数列 $\{a_n\} : -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ の一般項を求めよ。

$$\textcircled{1} \quad a_n = (-1)(-1)^{n-1} = (-1)^n$$

$$\textcircled{2} \quad a_n = \cos n\pi$$

$$\textcircled{3} \quad a_n = \frac{(-1)^n + \cos n\pi}{2}$$

(3) 確率密度関数 (R 7.2.25)

- 4 $0 \leq x \leq 1$ に値をとる確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = kx(x-1)$ であるとき、定数 k の値を定め $f(x)$ を求めよ。

$0 \leq x \leq 1$ において $f(x)$ が確率密度関数になるためには

$0 \leq x \leq 1$ で、 $\int_0^1 f(x)dx = 1$ でなければならない。

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 kx(x-1)dx = -\frac{k}{6} = 1$$

$$k = -6$$

よって $f(x) = -6x(x-1)$ (不十分)

(確率密度関数の定義)

★ 確率密度関数 $y = f(x)$

一般に、実数のある区間内に値をとる確率変数 X に対して、1 つの関数 $y = f(x)$ が対応して次の性質を持つ。

$$(1) f(x) \geq 0$$

$$(2) P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (a \leq b)$$

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間にある面積は1

$$k = -6 \quad \text{のとき,} \quad f(x) = -6x(x-1)$$

この場合、 $0 \leq x \leq 1$ で $f(x) \geq 0$, $\int_0^1 f(x) dx = 1$ を満たす。

確率密度関数の条件はしっかり押さえておこう

(4) 絶対値の不等式 (R8.2.25)

1 (3) 複素数平面上の点 z が, 不等式 $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \leq 2$ を満たすとき, 点 z の全体はどのような図形を表すか。 $z = x + yi$ (x, y は実数) とおいて答えよ。

$$\begin{aligned} z = x + yi \quad (x, y \text{ は実数}) \quad & |(x + yi) + (x - yi)| + |(x + yi) - (x - yi)| \leq 2 \\ & 2|x| + 2|yi| \leq 2 \\ & |x| + |y| \leq 1 \end{aligned}$$

z 全体は, 中心が原点で半径 1 の円の周および内部の図形を表す。(ミス)

$|x| + |y| \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ は成り立つが, $x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow |x| + |y| \leq 1$ は成り立たない。

反例

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ であるが } |x| + |y| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2} > 1$$

$$z = x + yi \quad (x, y \text{ は実数}) \quad |x| + |y| \leq 1$$

点 z 全体は、4点 $1, i, -1, -i$ を頂点とする正方形の周および内部の図形を表す。

(正解)

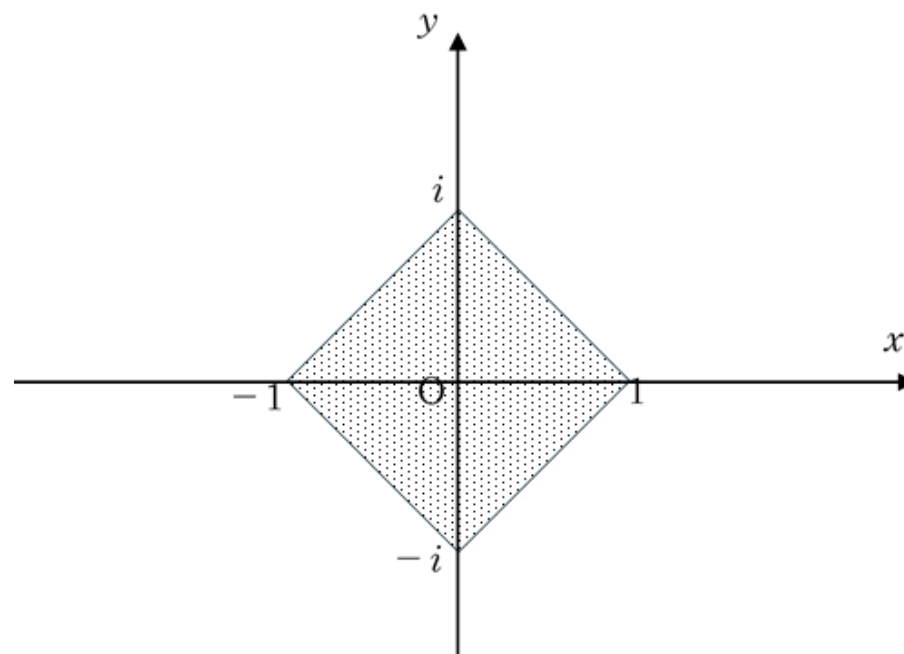
$|x| + |y| \leq 1$ について

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ のとき } x + y \leq 1$$

$$x < 0, y \geq 0 \text{ のとき } -x + y \leq 1$$

$$x < 0, y < 0 \text{ のとき } -x - y \leq 1$$

$$x \geq 0, y < 0 \text{ のとき } x - y \leq 1$$



絶対値記号を、きちんと場合分けをしてはずそう

V これからの勉強で大切にしてほしいこと

① 授業を大切にする

(基本的な定義は理解しておこう)

(基本的な公式は証明できるようにしよう)

② 様々な解答を考える

(別解をいつも意識しよう)

③ 日常の事象を数学的に探究する

(日常生活の中で様々なことを探究してみよう)

V これからの勉強で大切にしてほしいこと

①授業を大切にする (例Ⅰ) (H30.2.25)

3 関数 $f(x)$ を, $f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x<0) \\ x & (x\geq 0) \end{cases}$ と定 義 する。

「微分係数の定義」にしたがって, $f(x)$ の $x=0$ における微分係数を求めよ。

(誤答例)

$x<0$ のとき

$$f(x)=x^2+x \text{ より } f'(x)=2x+1$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f'(x) = 1$$

$$f'(0)=1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$x \geq 0$ のとき

$$f(x)=x \text{ より } f'(x)=1$$

$$f'(0)=1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \text{ より } f'(0)=1$$

「微分係数の定義」

極 限 値 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が 存 在 す る と き ,

こ の 極 限 値 を 関 数 $f(x)$ の $x=a$ に お け る 微 分 係 数 と い い $f'(a)$ で 表 す 。

$x=a$ で 微 分 係 数 $f'(a)$ が 存 在 す る の は

$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ の 時 刻 で あ る 。

(基礎的な定義は理解しておこう)

3 関数 $f(x)$ を, $f(x)=\begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$ と定義する。

「微分係数の定義」にしたがって, $f(x)$ の $x=0$ における微分係数を求めよ。

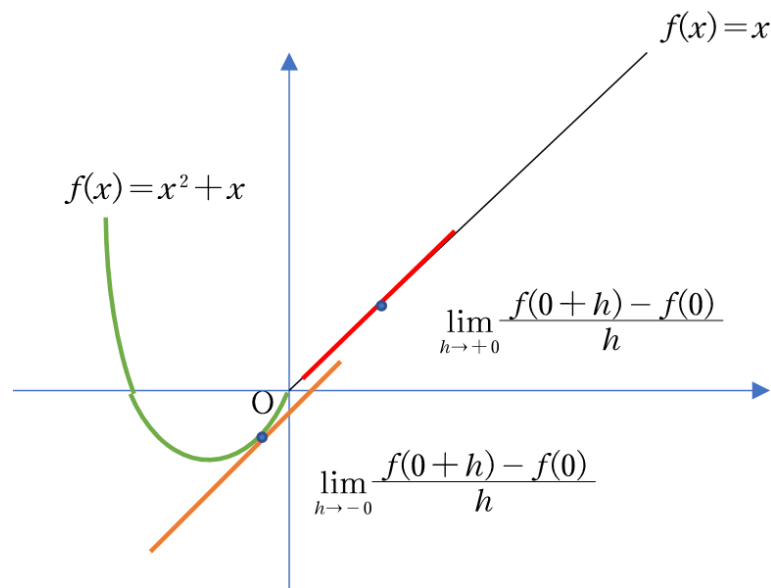
(解答)

$f(x) = x^2 + x (x < 0)$ と $f(x) = x (x \geq 0)$ に対して

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{(h^2 + h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (h + 1) = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1 \text{ より } f'(0) = 1$$



(例2) 教科書 (微分 数学Ⅲ)

微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ について, 次の公式が成り立つことを証明せよ。

$$(1) \quad \{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

$$(2) \quad \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(3) \quad \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$(2) \quad \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$F(x) = f(x)g(x)$ とすると

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(基本的な公式は証明できるようにしよう)

(別解) 対数微分法の活用

$$(2) \quad \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$F(x) = f(x)g(x)$ の両辺の絶対値の対数をとると

$$\log|F(x)| = \log|f(x)g(x)| = \log|f(x)| + \log|g(x)|$$

両辺 x で微分すると

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}F(x) + \frac{g'(x)}{g(x)}F(x)$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(3) \quad \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ の両辺の絶対値の対数をとると

$$\log|F(x)| = \log\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \log|f(x)| - \log|g(x)|$$

両辺 x で微分すると

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$F'(x) = \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} \right\} F(x)$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

②様々な解答を考える

例1)

$x^2+y^2=1$ のとき, $2x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

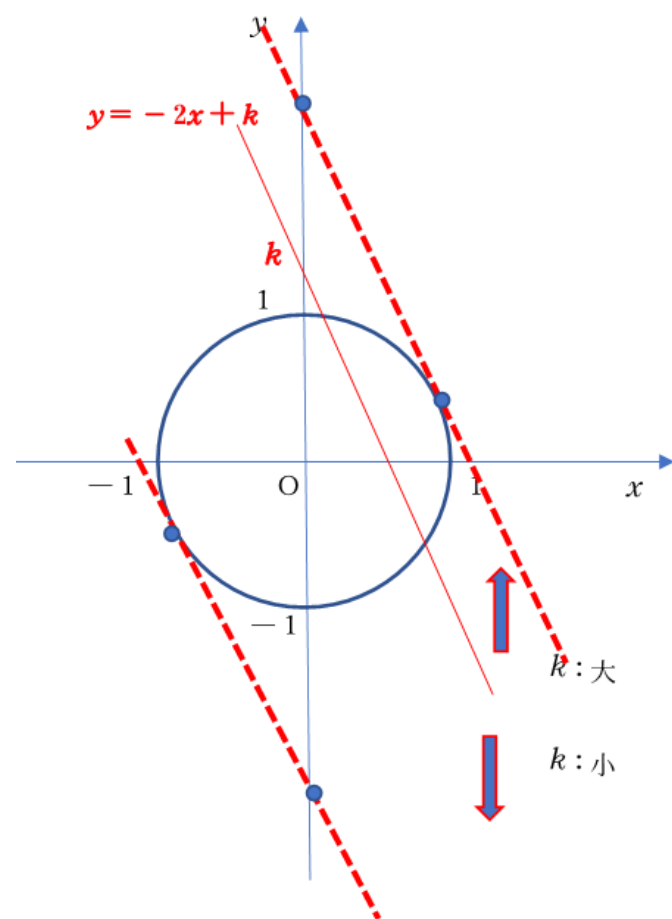
○ 様々な解答を考えてみよう。

例1)

$x^2+y^2=1$ のとき, $2x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

(解答1)円 $x^2+y^2=1$ と直線 $2x+y=k$ の共有点で考える

①判別式Dを活用する



$x^2+y^2=1$ これは中心が原点Oで半径1の円を表す

$2x+y=k$ より $y=-2x+k$ これは傾き -2 , y 切片 k の直線を表す

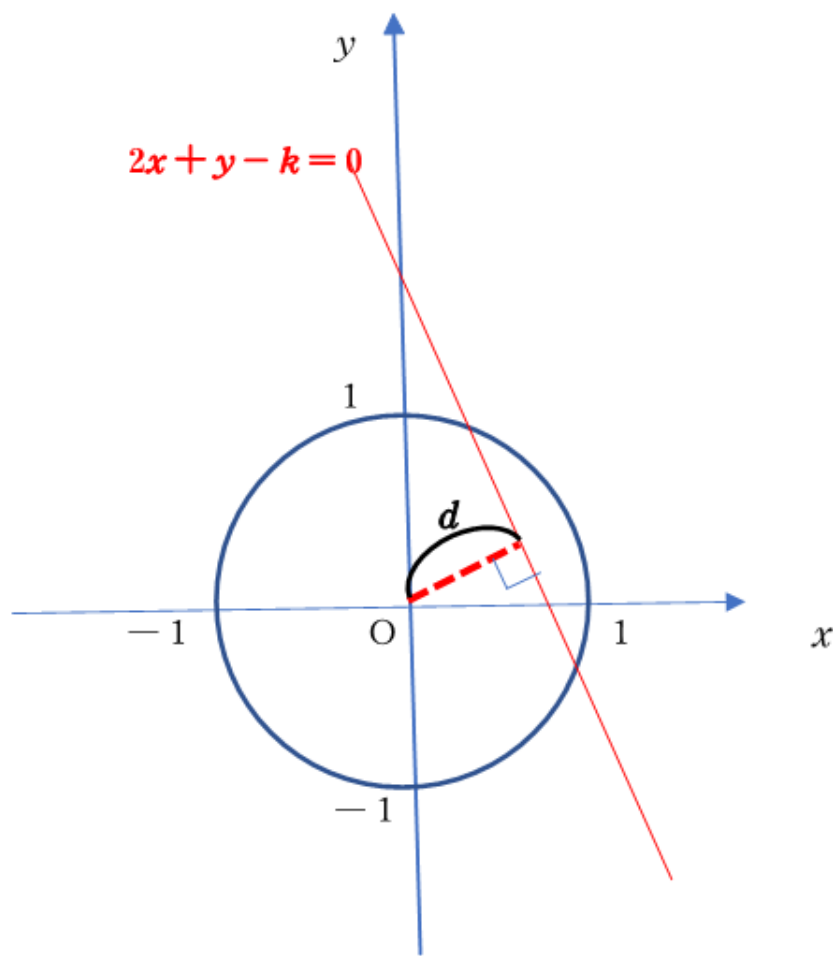
円と直線の式を連立して $5x^2-4kx+k^2-1=0$

共有するときを考えるので判別式 $D \geq 0$

例1)

$x^2+y^2=1$ のとき, $2x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

②原点と直線 $2x + y = k$ の距離 $d = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$ を活用する



$$2x + y = k \text{ より } 2x + y - k = 0$$

円の中心O から直線 $2x + y - k = 0$ までの距離を d とすると,

$$d = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

共有するときを考えるので $d \leq 1$

例1)

$x^2+y^2=1$ のとき, $2x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

(解答2)連立2次方程式の実数解で考える

$$x^2 + y^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2x + y = k \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$5x^2 - 4kx + k^2 - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

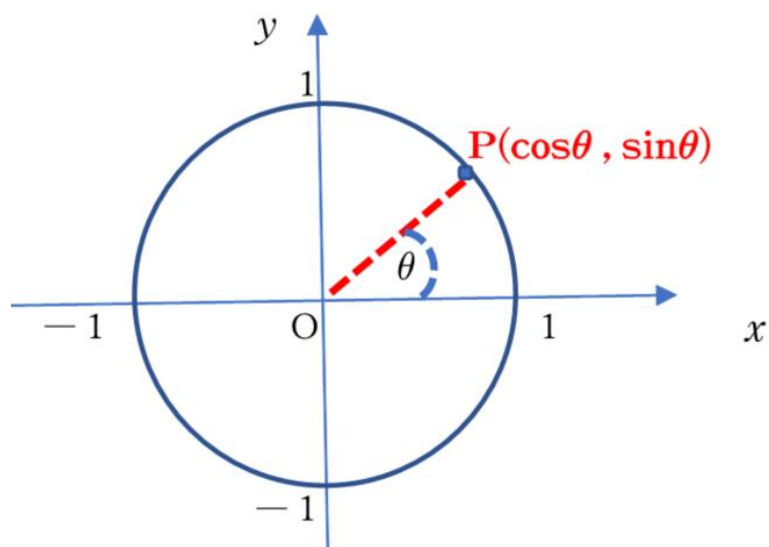
最大値と最小値を考えるので, x, y は実数である。

③は実数解を持つので判別式 $D \geq 0$

例1)

$x^2+y^2=1$ のとき, $2x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

(解答3) 三角関数 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ ($0\leq\theta<2\pi$) で考える



$$2x + y = 2\cos\theta + \sin\theta$$

$$= \sin\theta + 2\cos\theta$$

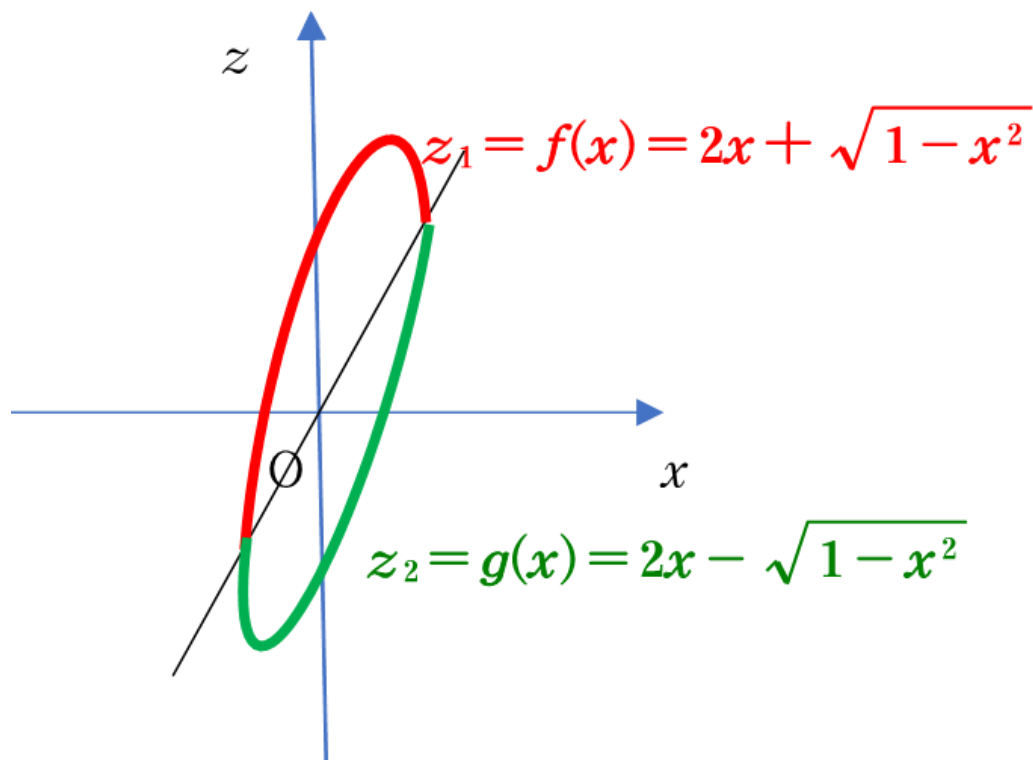
$$= \sqrt{5} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\text{ただし } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

例1)

$x^2+y^2=1$ のとき, $2x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

(解答4)無理関数 $f(x)=2x+\sqrt{1-x^2}$ と $g(x)=2x-\sqrt{1-x^2}$ で考える



$$x^2+y^2=1 \text{ より } y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

$$z=2x+y=2x\pm\sqrt{1-x^2} \text{ (} x \text{ の無理関数)}$$

$$f(x)=2x+\sqrt{1-x^2} \text{ と } g(x)=2x-\sqrt{1-x^2} \text{ で考える。}$$

改めて xz 平面上で $z=f(x)$, $z=g(x)$ のグラフで考えるとよい。

$z=f(x)$ は, $z_1=2x$ (直線)と $z_2=\sqrt{1-x^2}$ (半円)の合成

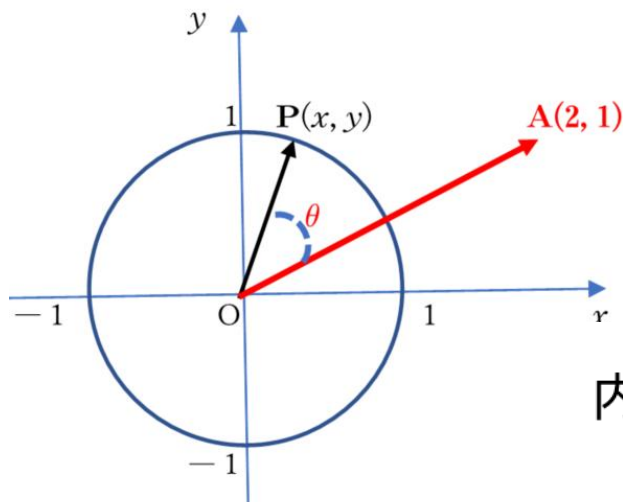
例1)

$x^2+y^2=1$ のとき, $2x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

(解答5)円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $P(x, y)$ と定点 $A(2, 1)$ として内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}$ で考える

円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P(x, y)$, 定点 $A(2, 1)$ とする。

$$\overrightarrow{OP} = (x, y), \quad \overrightarrow{OA} = (2, 1)$$



$$\text{内積 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 2x + y \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{内積 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OA}| \cos \theta = \sqrt{5} \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } 2x + y = \sqrt{5} \cos \theta$$

例1)

$x^2+y^2=1$ のとき, $2x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

(解答6) コーシー・シュワルツの不等式を活用する

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

(証明)

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) - (\text{左辺}) &= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 \\ &= (ay - bx)^2 \geq 0\end{aligned}$$

$$\text{よって } (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

この不等式は, すべての実数 a, b, x, y について成立

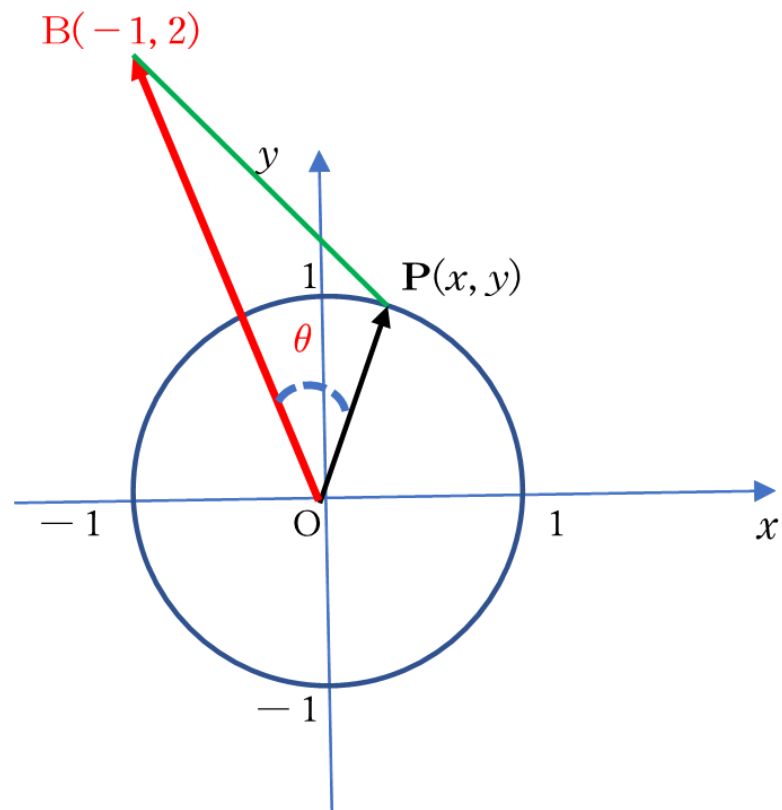
よって $x^2 + y^2 = 1, a = 2, b = 1$ のときも満たす

$$(2x + y)^2 \leq 5$$

例1)

$x^2+y^2=1$ のとき, $2x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

(解答7)円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $P(x,y)$ と定点 $B(-1,2)$ として $\triangle OBP$ の面積で考える



円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $P(x,y)$, 定点 $B(-1,2)$ とし,
 $\angle BOP = \theta$ ($0 \leq \theta < \pi$) とする。

$$\text{面積 } \triangle OPB = \frac{1}{2} |2x - (-1)y| = \frac{1}{2} |2x + y| \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{面積 } \triangle OPB = \frac{1}{2} OP \cdot OB \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin \theta \quad (0 \leq \theta < \pi) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より } |2x + y| = \sqrt{5} \sin \theta$$

(別解をいつも意識しよう)

③日常の事象を数学的に探究する

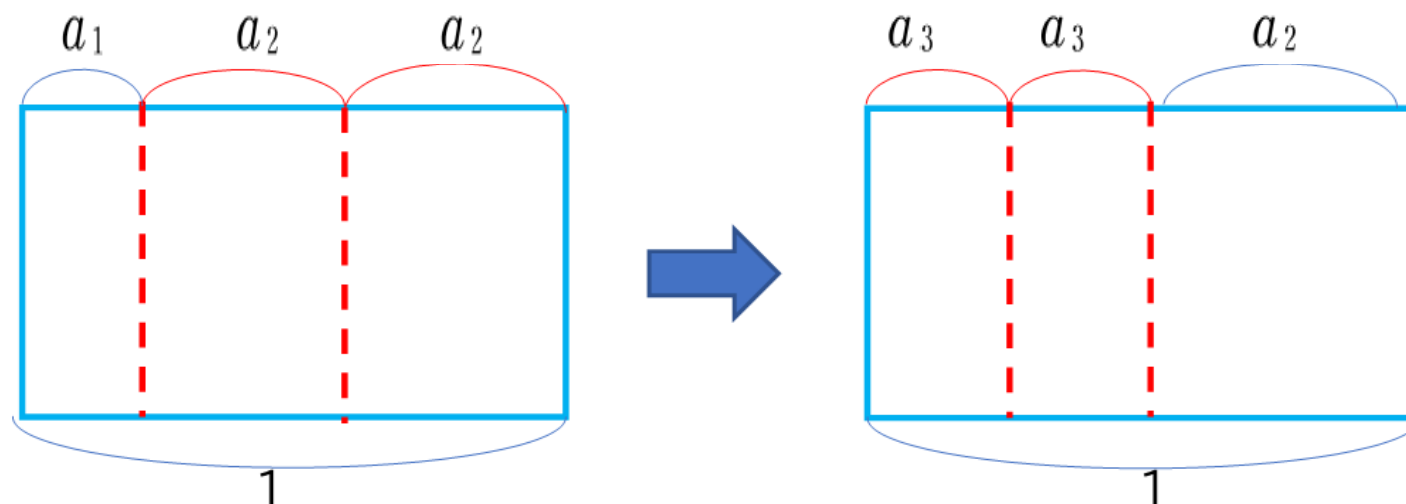
(例1) (長方形の1辺の3等分を極限で考える)

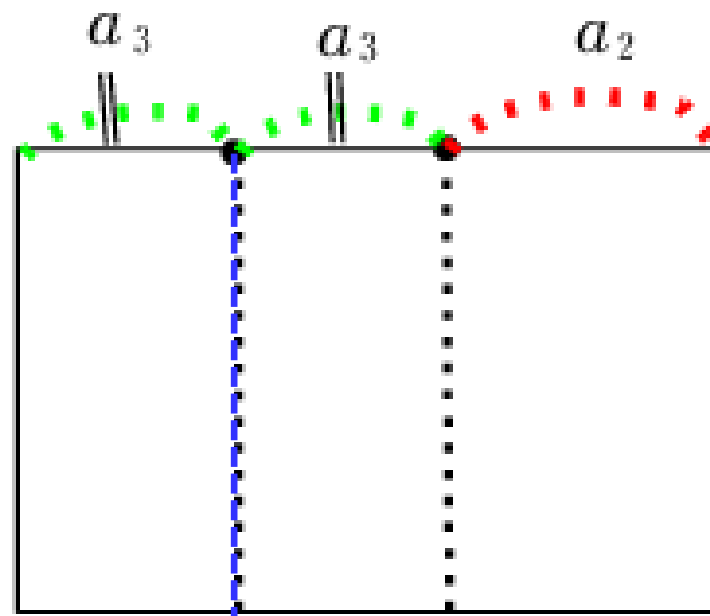
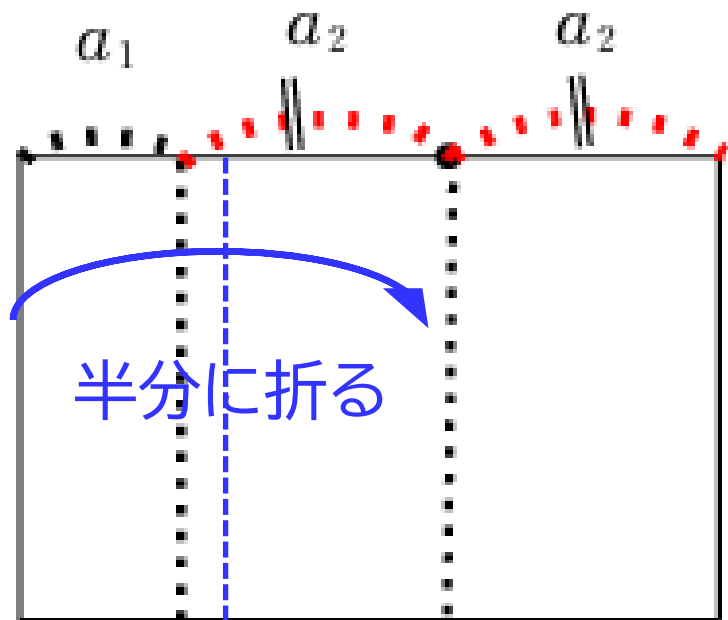
一枚の1辺の長さが1の長方形の用紙がある。初めに下図のように適当な長さ a_1 ($0 < a_1 < 1$) で折り曲げ、残りを半分の長さ a_2 で折り曲げる。

用紙を元に戻して、長さ a_2 で折り曲げた残りの半分の長さを a_3 の長さで折り曲げる。

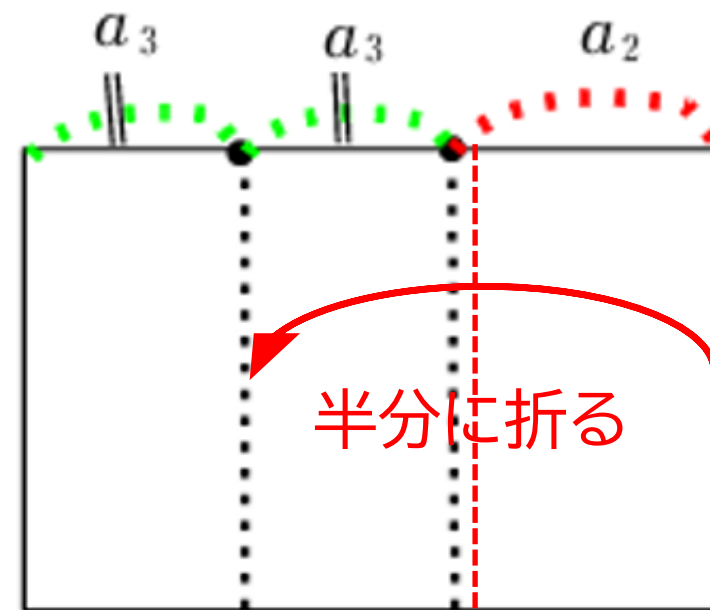
以下、同様に折り曲げを続けるとき、折り目は、 a_1 の長さに関係なく長方形の1辺の3等分に近づく。その理由を考えよ。

(図)





以下、繰り返し...



n 回目の折り曲げの長さを a_n とすると, $(n+1)$ 回目の折り目の長さは a_{n+1} である。

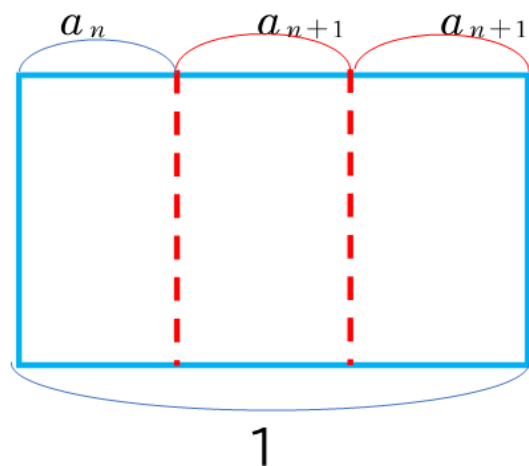
$$a_n + 2a_{n+1} = 1 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$$

$$a_n = \left(a_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$$



(日常生活の中で様々なことを探究してみよう)

(演習) (長方形の1辺の5等分を極限で考える)

例1を参考にして、長方形の一辺の5等分に近づけるためには、どのような折り方をすればよいだろうか？また、その理由を言いなさい。

例1は、漸化式 $a_n + 2a_{n+1} = 1$ の関係から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$ を導いた。

(予想) 漸化式 $a_n + 4a_{n+1} = 1$ の関係から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{5}$ が導けないか。

$a_n + 4a_{n+1} = 1$ より

$$a_{n+1} - \frac{1}{5} = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(a_n - \frac{1}{5}\right)$$

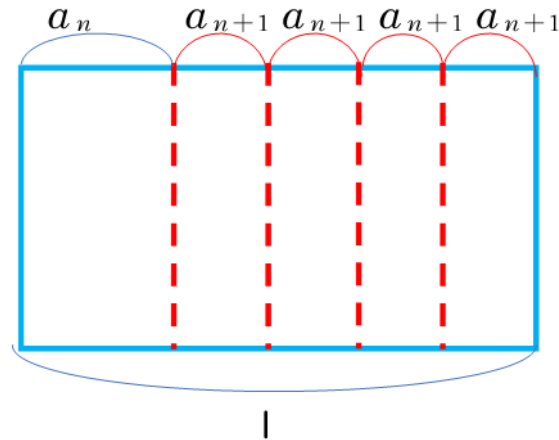
$$a_n - \frac{1}{5} = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(a_{n-1} - \frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(a_1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$a_n = \left(a_1 - \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{5}$ が導ける。

(方法) 漸化式 $a_n + 4a_{n+1} = 1$ の関係を作るために、どのような折り方をすればよいか。

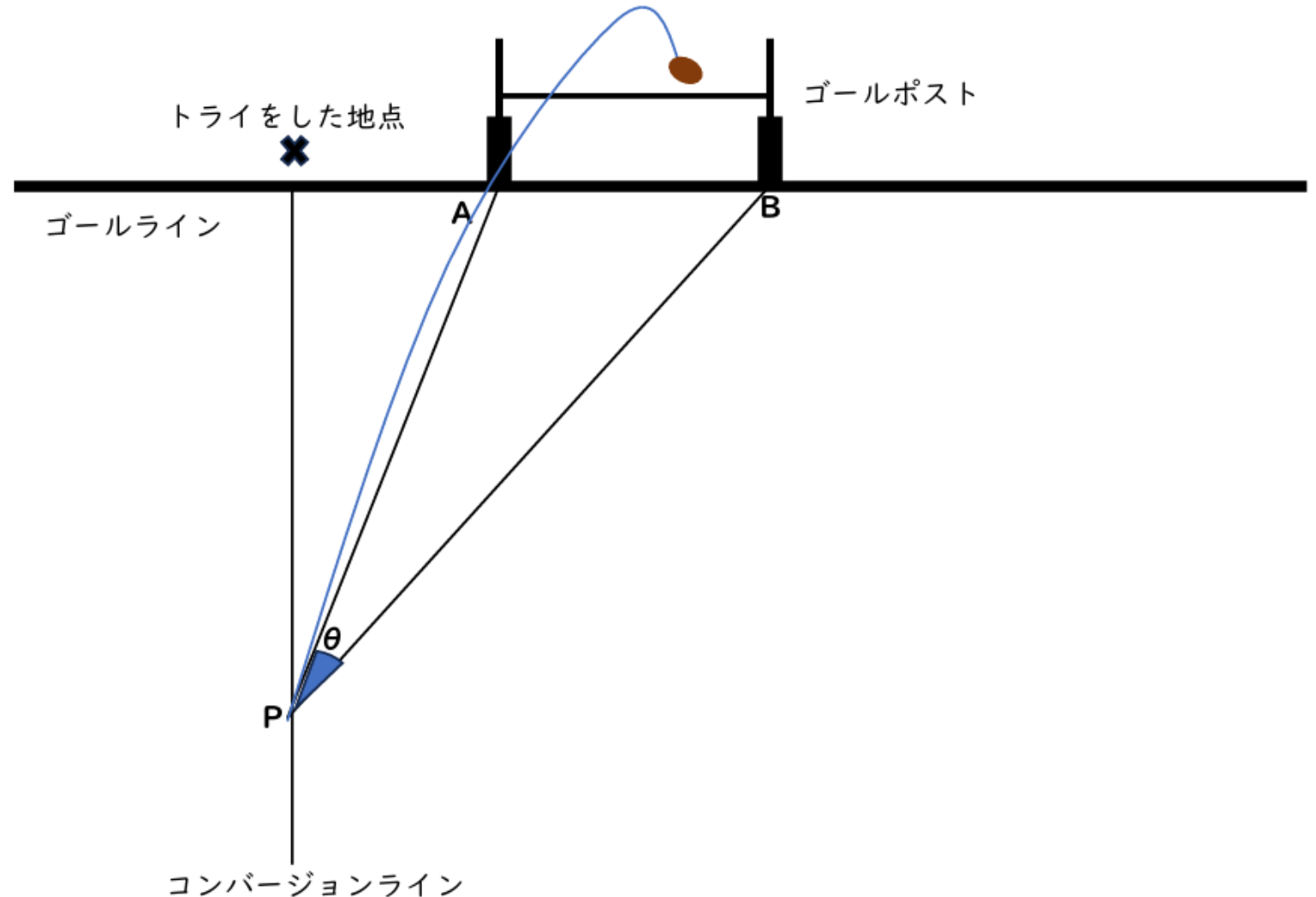
n 回目の折り曲げの長さを a_n とすると、次の $(n+1)$ 回目の折り目の長さ a_{n+1} を残りの長さの4等分にとると、下図のようになる。



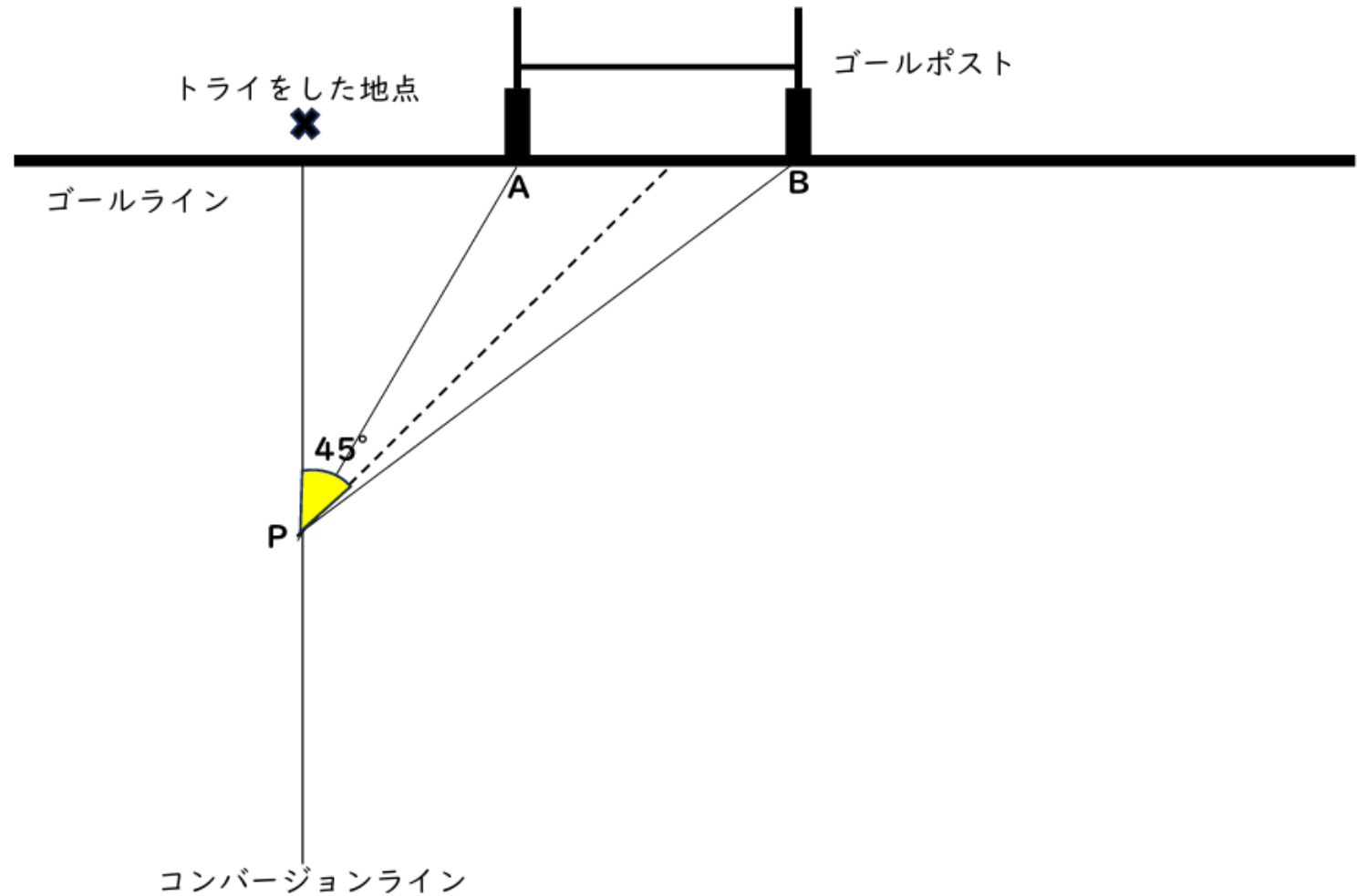
したがって $a_n + 4a_{n+1} = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$ の関係になる。

(例2) 見込む角の最大

ラグビー競技において、トライ後の「コンバージョンキック」の位置は、どの位置からキックすると、幅広くゴールが狙えるか数学的に考察してみよう。

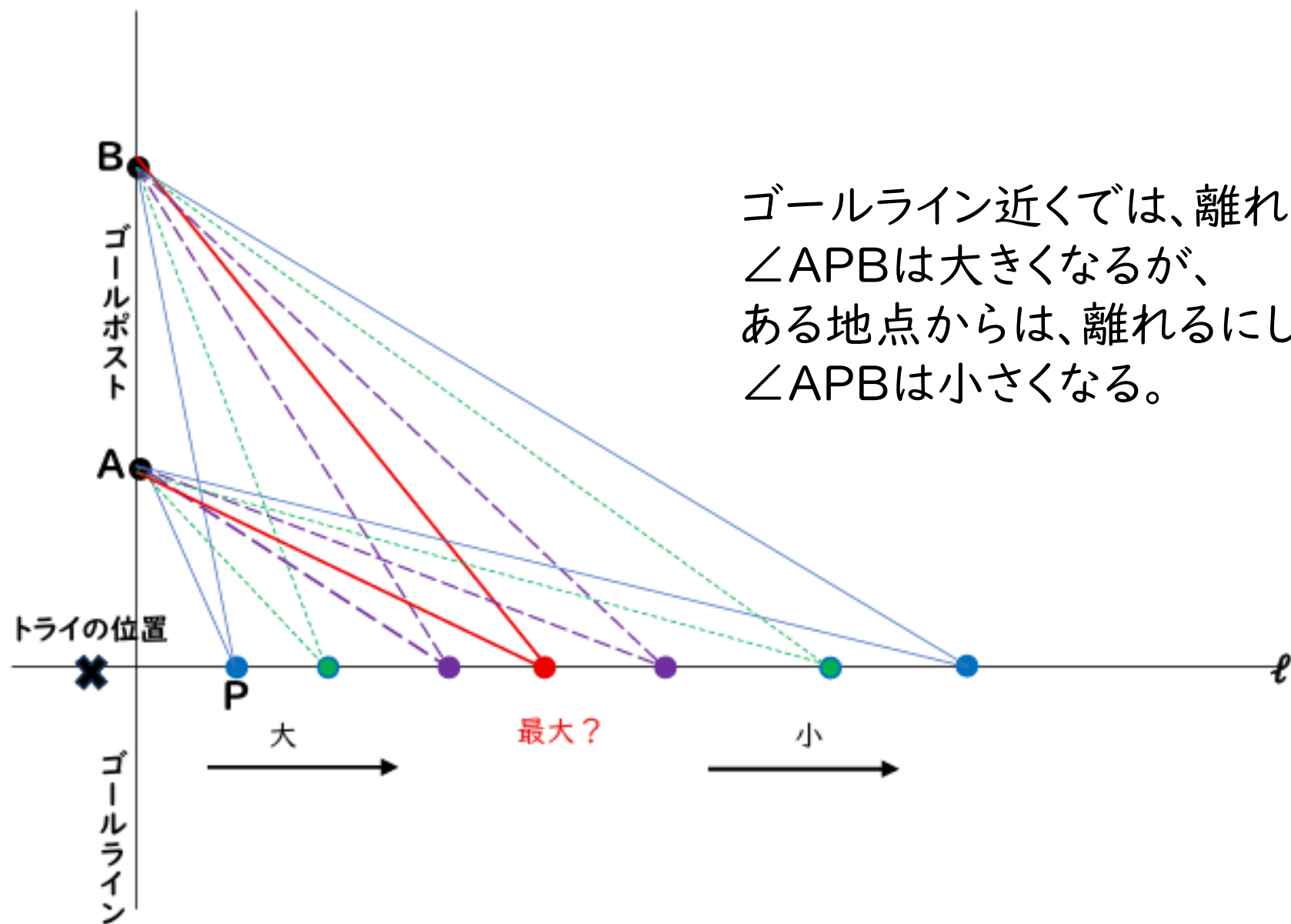


監督やコーチからは、
「ゴールポストの中央に
向かって、コンバージョン
ラインとの角度が 45° に
なる地点がベストポジ
ションだ」と言われてい
るよ。



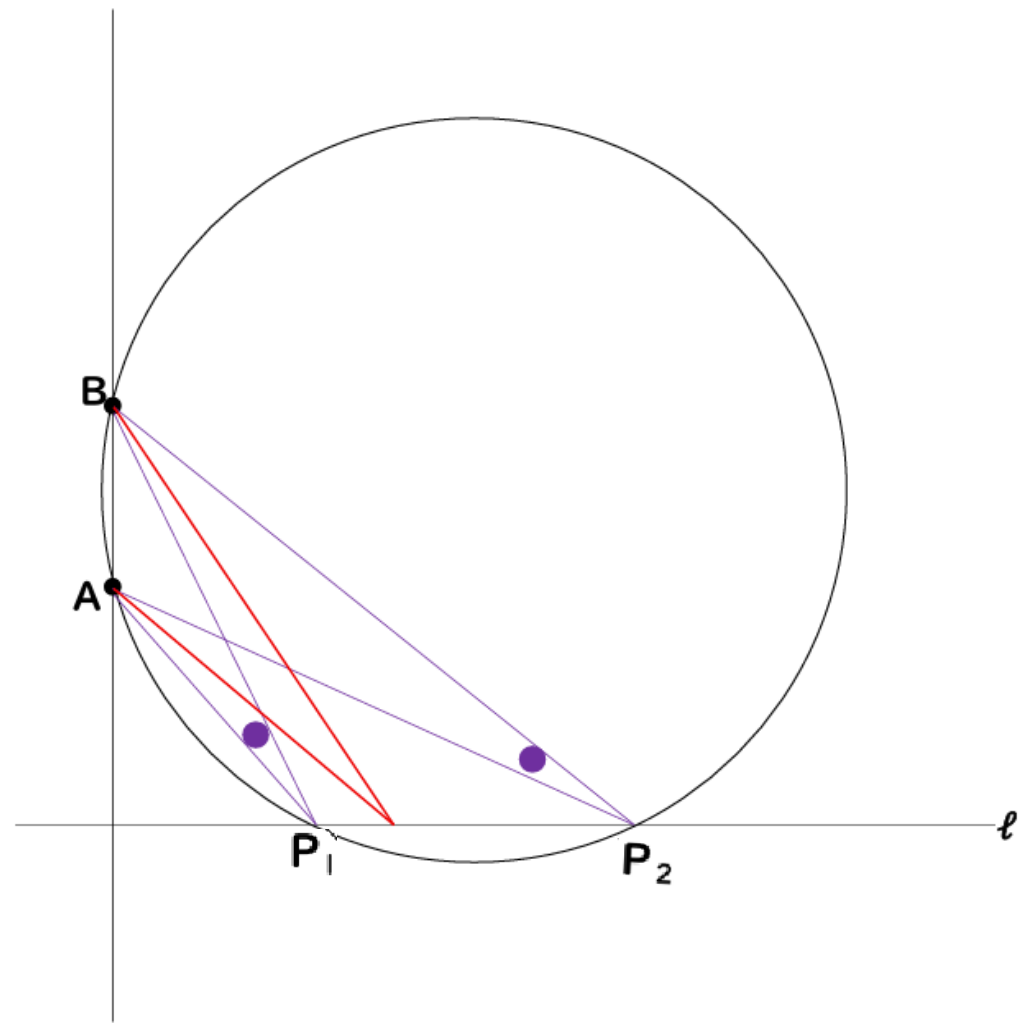
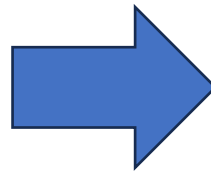
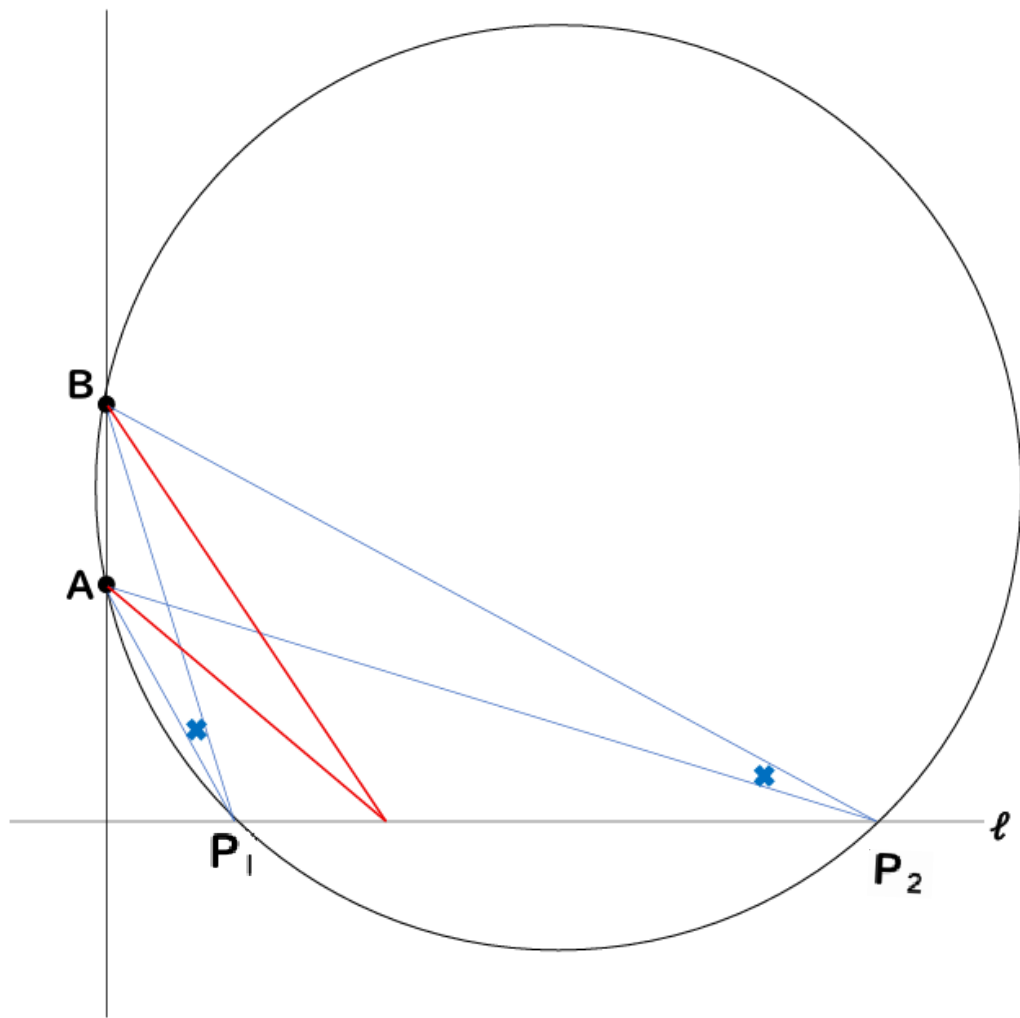
数学的に考察してみよう

ゴールラインを縦軸に, コンバージョンライン(ℓ)を横軸にとって, 幅広くゴールを狙える位置を考える



ゴールライン近くでは、離れるにしたがい
 $\angle APB$ は大きくなるが、
ある地点からは、離れるにしたがい
 $\angle APB$ は小さくなる。

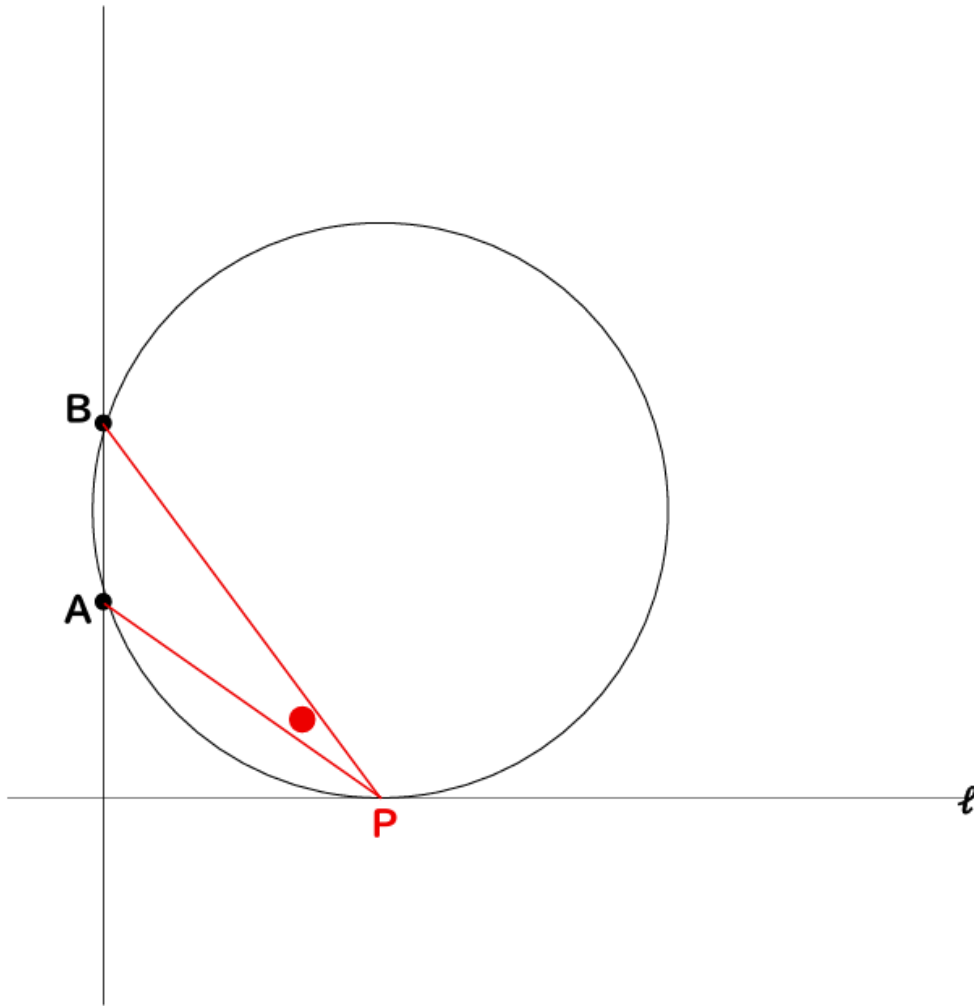
点Pと、2点A, Bを通る円の円周角で考える



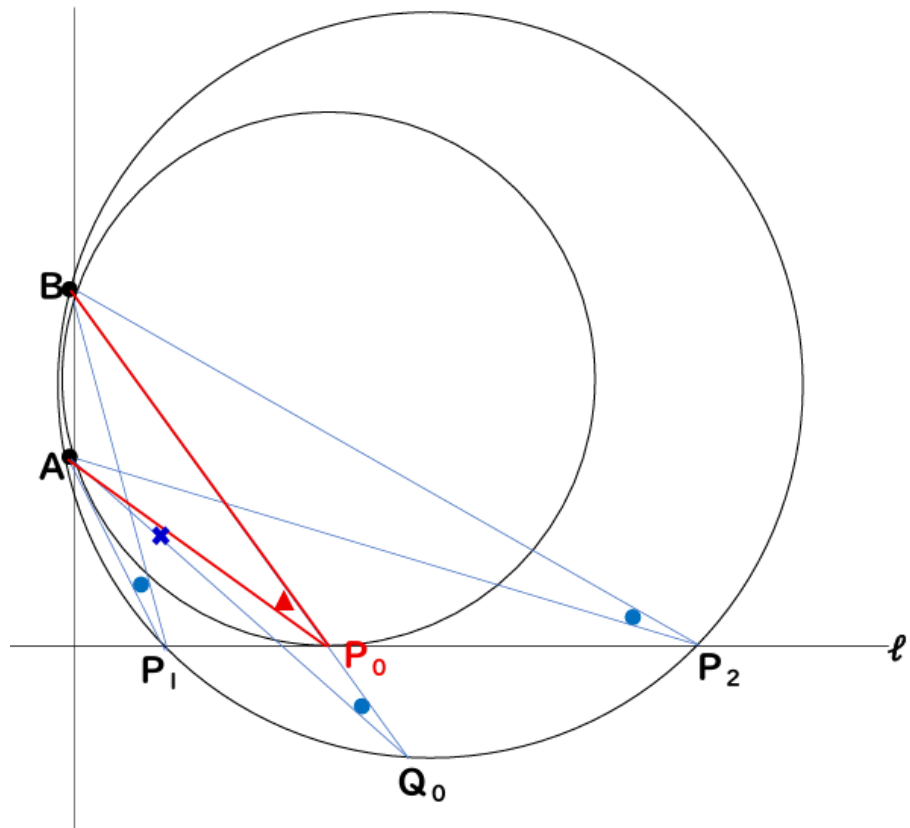
円を小さくしていくと、円周角は大きくなり ($\times < \bullet$)

点Pと2点A, Bを通る円の円周角で考える

円が ℓ と接するとき, 円周角は最大となると予想される。



円が ℓ と接するとき円周角が最大になることを証明してみよう。



円が ℓ と点 P_0 で接するとき、
 $\angle AP_0B = \theta_0$ ▲ とする。

円が ℓ 上の2点 P_1, P_2 を通るとき、
 直線 BP_0 と円との交点を Q_0 とする。
 P_1, P_2, Q_0 は同一円周上にあるから
 $\angle AP_1B = \angle AQ_0B = \angle AP_2B = \theta$ ● とする。

θ と θ_0 の大小を調べると、

$$\angle AP_0B = \angle AQ_0P_0 + \angle Q_0AP_0$$

$$\theta_0 = \theta + \angle Q_0AP_0$$

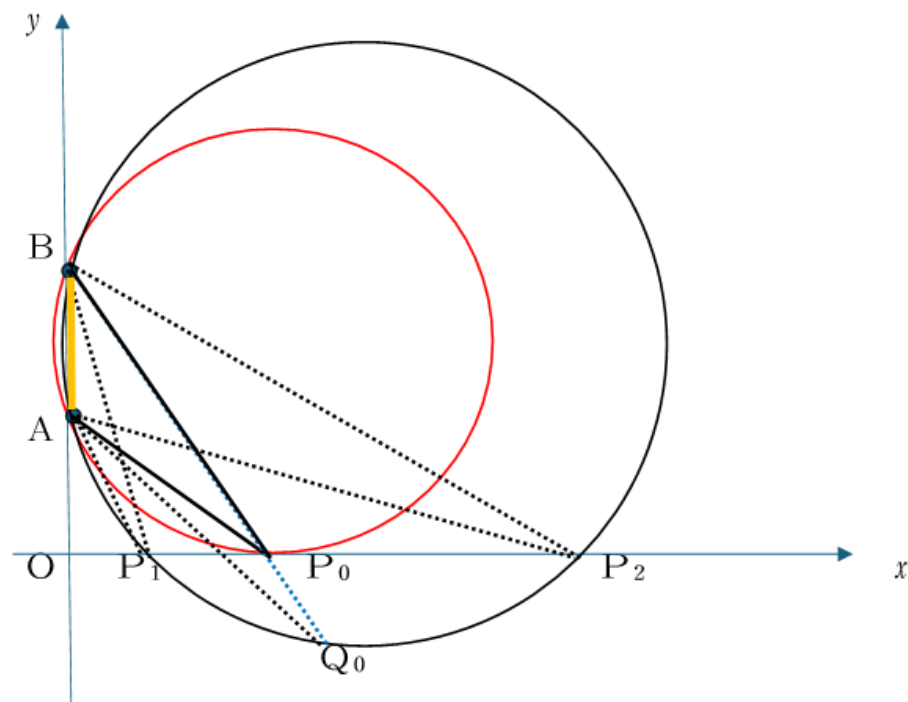
$$(\text{▲} = \text{●} + \text{✕})$$

よって、 $\theta_0 > \theta$

円が ℓ と接するとき、 $\angle APB$ は最大である。

(研究 正弦定理で考える)

弧AB に対する円周角の大きさが最大となる円C はどのような円か正弦定理を用いて考えてみよう。



2点A,Bを通る円Cの半径を R とすれば,

$$\text{正弦定理より } \frac{AB}{\sin \angle APB} = 2R$$

$$\text{したがって, } \sin \angle APB = \frac{AB}{2R}$$

$\angle APB$ は弧ABに対する円周角だから $0 \leq \angle APB < \frac{\pi}{2}$

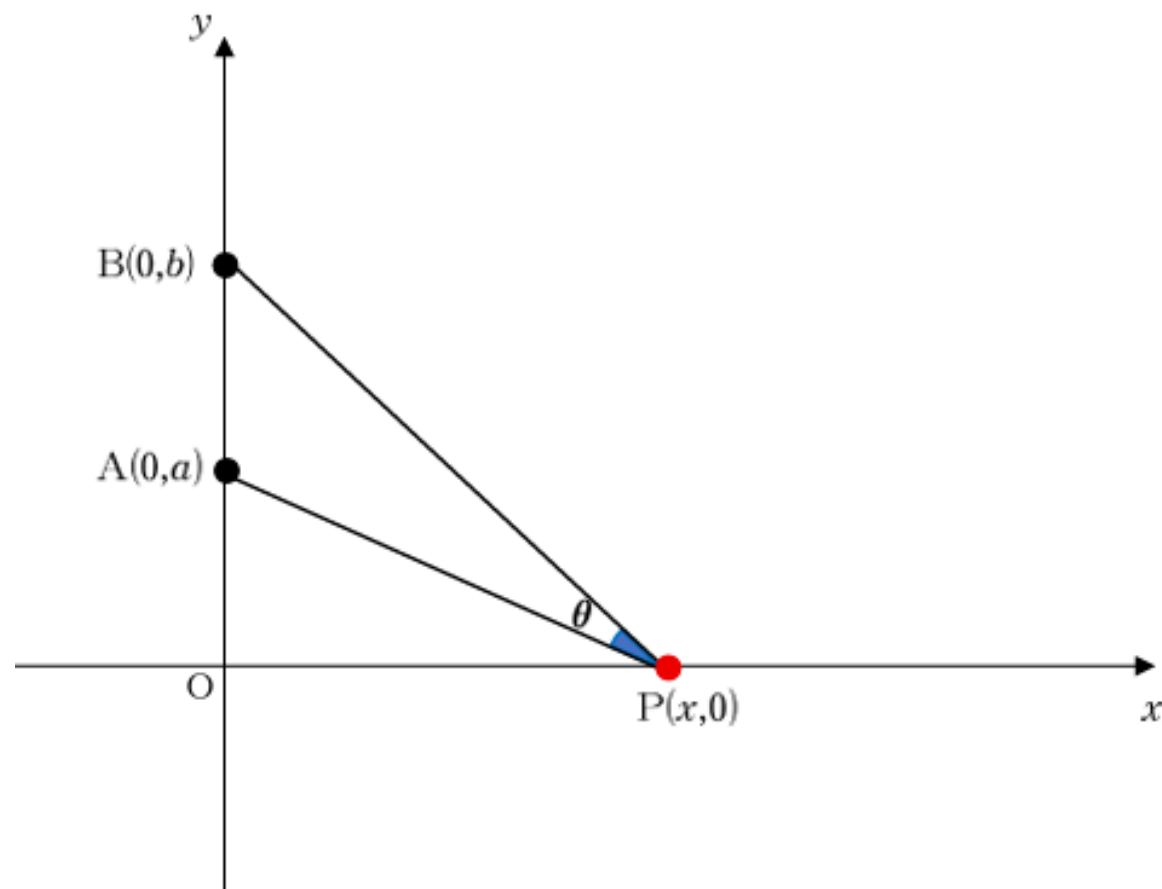
$\angle APB$ の最大は, $\frac{AB}{2R}$ が最大となるときである。

つまり, R が最小になるときであり, 円Cが x 軸に接するときである。

(座標平面に設定してみる)

ゴールポストの位置 A, B を y 軸上にとり, $A(0, a), B(0, b)$ とする。コンバージョンライン (キックするライン) を x 軸とし, キックする位置を $P(x, 0)$ ($x > 0$) とする。ただし, コンバージョンラインはゴールポストの外側とする。

このとき, $\angle APB = \theta$ が最大となる P の位置を求めてみよう。



(P_0 の座標を求める)

点 P_0 の座標を求めてみよう。

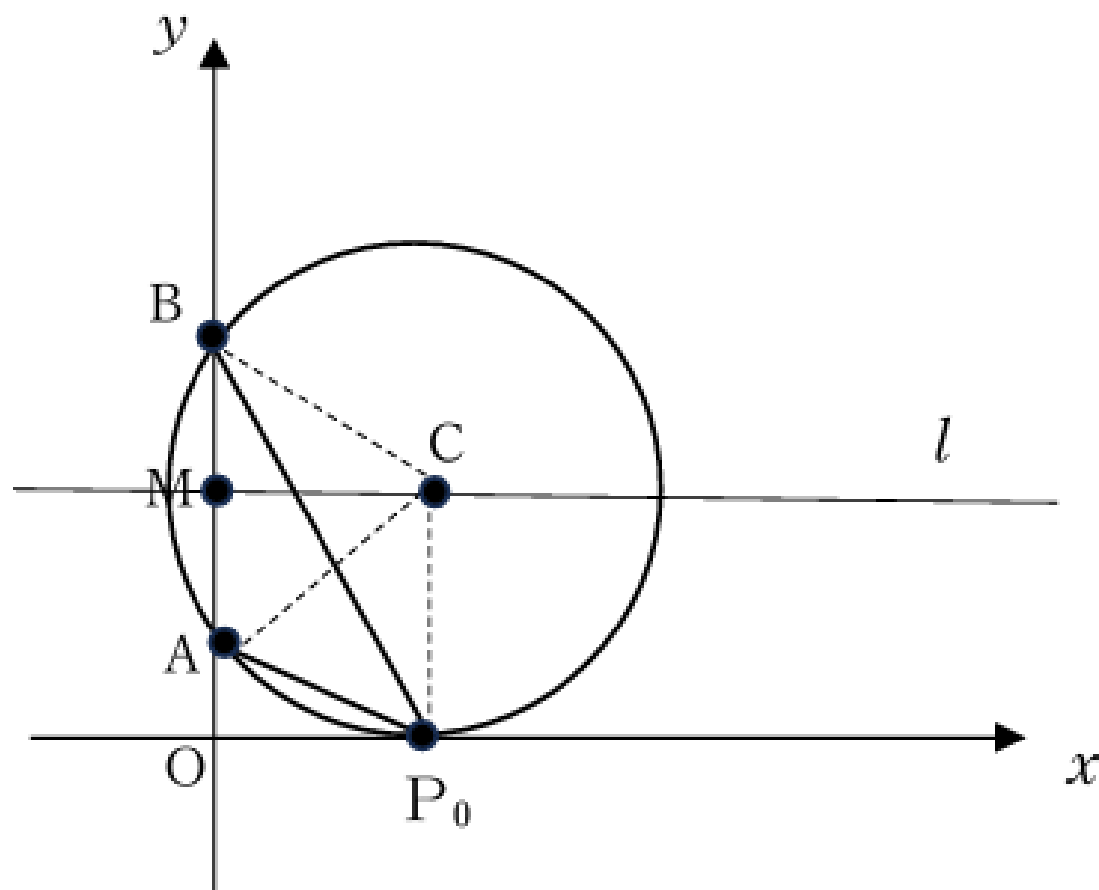
$P_0(x, 0)$ とする。

方べきの定理より $OP_0^2 = OA \cdot OB$

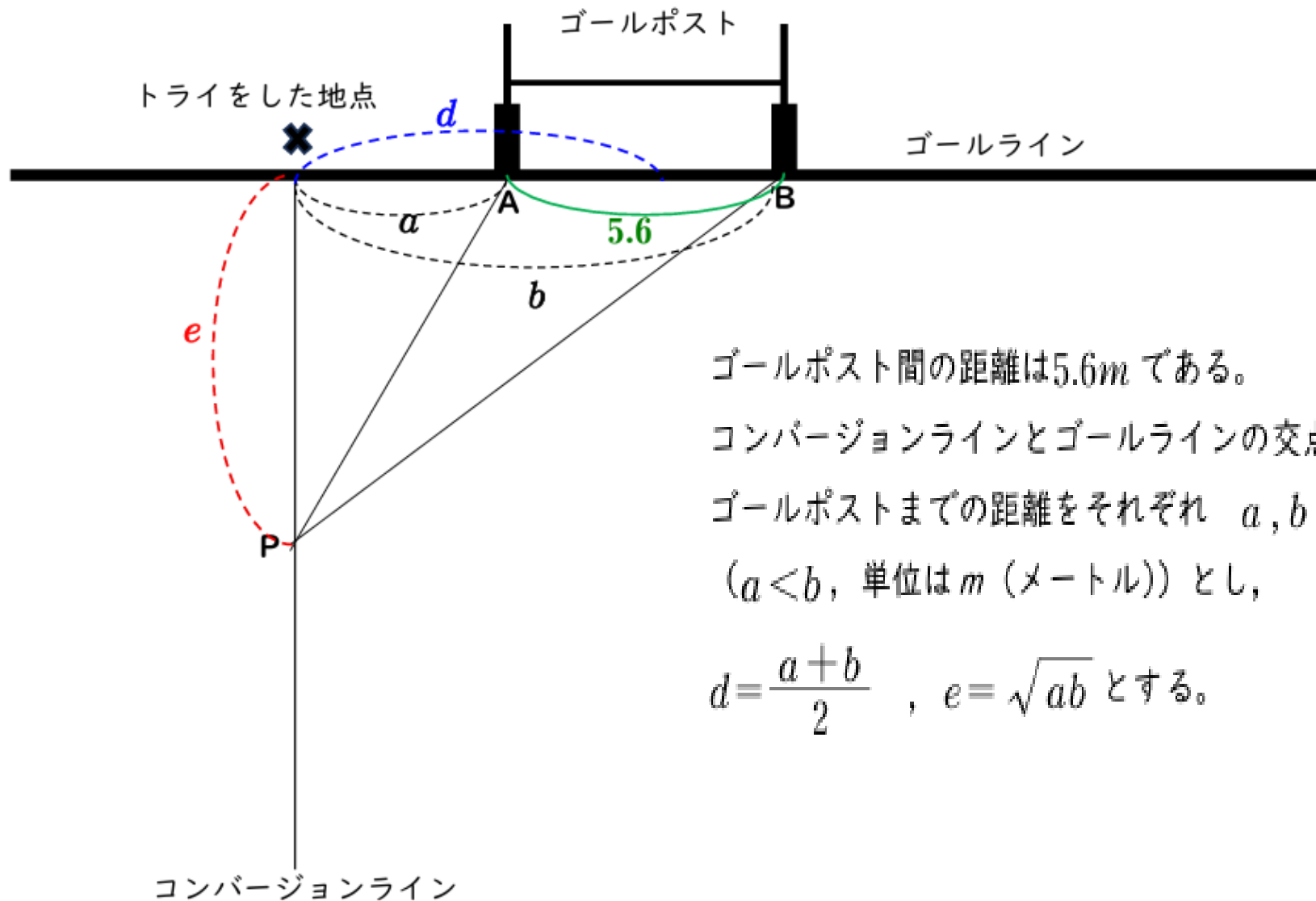
$$x^2 = a \cdot b = ab$$

$$x > 0 \text{ より } x = \sqrt{ab}$$

よって, $P_0(\sqrt{ab}, 0)$



コンバージョンキックは、ゴールポストの中間に向かって45°の角度で蹴るのがベストか？



ゴールポスト間の距離は5.6mである。

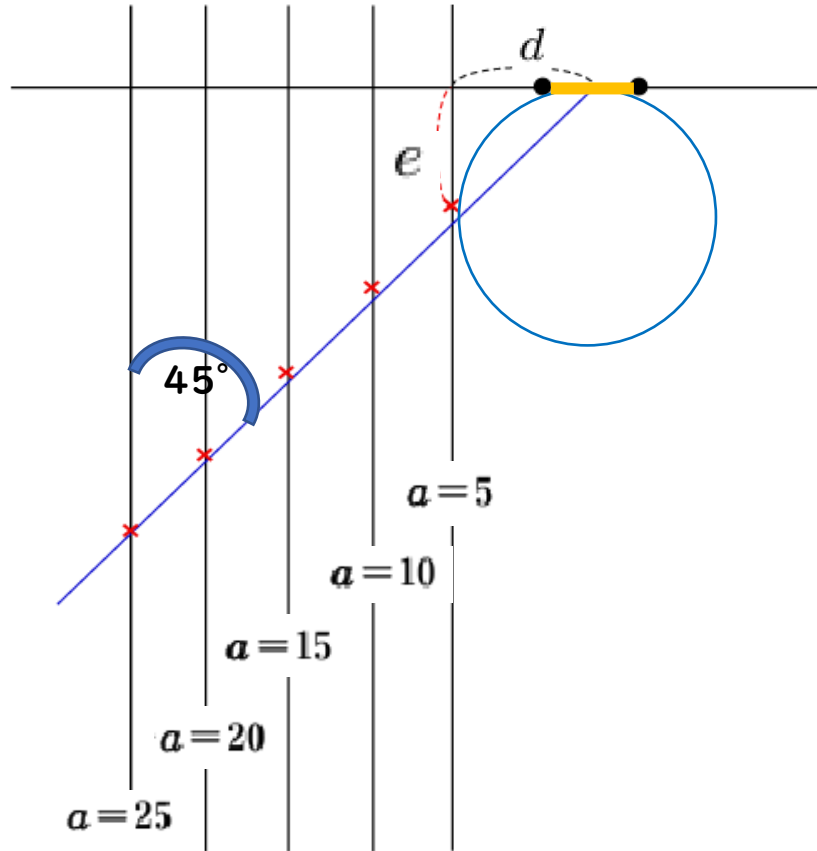
コンバージョンラインとゴールラインの交点から

ゴールポストまでの距離をそれぞれ a, b

($a < b$, 単位は m (メートル)) とし,

$$d = \frac{a+b}{2}, \quad e = \sqrt{ab} \text{ とする。}$$

コンバージョンキックは、ゴールポストの中間に向かって45°の角度で蹴るのがベストか？



b, d, e の値は, a の値によって, 次のように定まる。

a	b	$d = \frac{a+b}{2}$	$e = \sqrt{ab}$	$d - e$
5	10.6	7.8	7.28	0.52
10	15.6	12.8	12.49	0.31
15	20.6	17.8	17.58	0.22
20	25.6	22.8	22.63	0.17
25	30.6	27.8	27.66	0.14

表からわかるように, コンバージョンキックはゴールポストの中間に向かって概ね45°の角度でキックすると, 蹴り込む際の最大角が得られる。

最後に 生徒の皆さんへ

〇1年生・2年生の皆さんへ

- ・普段の学校の授業を中心に基礎的な力を身に付けることが大切です。授業を受けるとき、何故、そのことが成り立つのか、理解することが重要です。
- ・様々な問題を友人と一緒に解いてみてください。説明すると自分の考えがまとまります。人にわかってもらうと自信にもつながります。
- ・大学入試は、教科書をベースに作られます。公式や定理は自分で導けるようにしてください。
- ・できるだけグラフや図で表現して問題を解くことをお勧めします。自分の頭を整理するだけでなく様々な発想が生まれてきます。
- ・問題を解くときは、他に解き方はないのか、いつも意識してください。別解を考えることで数学的なセンスが磨かれます。
- ・日常の生活の中で数学的な探究を試みてください。数学への興味や関心が深まります。

○3年生・既卒生の皆さんへ

- ・本学の過去問を解くことをお勧めします。どのような問題が出題されているのか知ること
も大切です。自分の不得意の分野を把握して対策を講じてください。
- ・難しい問題も基本問題の組み合わせです。単に答えを導くのではなく、途中の説明を論理
的に進め、説得力を持った解答作成を心掛けてください。
これから受けるマーク式の模擬試験についても、記述試験の要領でしっかり途中の説明が
できるようにしてください。
- ・長崎大学の入試問題の大問の設問は、4題程度、問うようにしています。はじめの設問は
基本問題ですから、丁寧に解くようにしてください。また、設問間の関連を見るとヒントに
なることも多いです。わからなくてもあきらめずに最後まで1点でも得点できるよう努めてく
ださい。

ご清聴 ありがとうございます



長崎大学
NAGASAKI UNIVERSITY